

调整试卷结构 体现能力立意 考查综合素质

——对北京市2015年高考数学试题的分析

王雅琪

曹一鸣

(北京教育考试院 100083) (北京师范大学 100875)

1 引言

2015年的高考已经结束半年多了,从社会反响来看,教师、学生以及家长对数学试卷给予较高的评价.普遍认为试卷难度适中,保持稳定,有利于提高学生学习数学的兴趣,同时试卷也有很好的选拔功能,对不同水平的考生有很好的区分功能.

从2013年开始我们对试卷难度进行调整,从下表可以看出,2015年的试卷确实达到了调整的目标.

表1 2013—2015年数学总体难度

	文科		理科	
	难度	平均分	难度	平均分
2013年	0.59	88.47	0.67	100.43
2014年	0.70	104.49	0.66	99.08
2015年	0.77	115.94	0.71	107.76

在调整难度的同时,试卷依然保持了北京特色,试题背景新颖,内涵丰富,亮点纷呈,解法灵活,思维深刻,锐意创新.下面我们从命题意图,学生作答,试题数据和教学建议等几个方面对试卷进行分析,对典型试题进行梳理,旨在和大家一起探讨,发挥试卷的正导向作用.

2 试卷整体特点

2.1 保持特色,注重基础知识的理解

多年来,高考数学北京卷一直坚持“简洁、清晰、亲切、严谨”的风格,注重对数学基础知识、基本技能的全面考查.数学课程标准中所要求的知识和技能是未来公民的基本数学需求,也是学生进一步学习和发 展所必需的.对基础知识的考查,并不要求学生死记硬背概念、公式和法则,而是注

重考查学生对基础知识的理解和把握.例如,第6题主要考查数列、基本不等式性质等基本数学知识的理解和简单运用.第16题的前两问主要考查概率的基本概念和简单计算,较为基础;第三问考查对方差概念的本质理解,充分反映了北京试题“多想少算”特点.

2.2 基于教材,重视主干知识的掌握

教材是学校教学最基本、最主要的依据,也是落实课程标准内容和能力目标要求的载体.试卷中设计了一些源于教材的试题,试图通过这一导向引导中学数学教学,从而改变教学中过分依赖复习资料、脱离教材、题海战术的现象.

选择题和填空题中的基本题大多数是源于教材中的例题或习题.例如,理科试卷第9题,写出 $(2+x)^5$ 的展开式中 x^3 的系数;第11题,在极坐标系中,求点到直线的距离;第15题,已知三角函数表达式,先运用公式化简,然后求出最小正周期和在给定区间上的最小值.这些都是教材上例(习)题的变形.

虽然试题对考试说明中各个部分的内容均有不同程度的涉及,但在考查要求上有主次之分,做到重点知识重点考查.课时比例较高的几部分内容,如,函数与导数,平面向量与立体几何,三角函数,解析几何,统计与概率等在试卷中的分值也比较高.

2.3 着眼未来,强调数学的基本素养

随着现代社会的发展,数学越来越成为每一个公民所必备的基本素养.因此数学学科的高考既关注学科本身的基础知识和基本技能的考查,更关注有利于促进学生终身发展的数学空间想象能力、推理论证能力、数据处理能力以及分析问题

和解决问题的能力等数学基本能力的考查. 这些能力有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和做出判断, 在帮助学生形成理性思维的过程中发挥着独特的作用.

例如, 第5题, 根据三棱锥的三视图来求三棱锥的表面积, 这需要学生具有一定的空间想象能力. 第17题, 立体几何题, 既考查了学生的空间想象能力, 又考查了学生的推理论证能力. 第16题则是对学生数据处理能力以及分析问题和解决问题的能力的综合考查.

2.4 关注实践, 考查学生的应用意识

加强数学与现实的联系是数学课程改革的一个重要导向, 也是数学学习的一个重要目标. 因此, 试卷设计了适当的问题来考查学生阅读、理解, 综合运用数学知识、思想方法解决实际问题的能力. 问题背景的选择做到了以下几个方面: (1) 问题情景贴近学生的现实生活实际, 不给学生因对现实问题的不了解而造成阅读、理解方面的困难. (2) 问题设计基于真实资料和相关数据. (3) 所解决问题的结论有现实意义. 例如, 第8题, 汽车在不同速度下的燃油效率, 可以进一步引申为有关节能减排问题. 第16题, 康复时间问题, 更是一个人人关心的问题.

试卷中有一定比例的应用题, 考查学生读图识表, 从图表中分析提取信息、进行数据处理从而解决问题的能力. 例如, 第8题, 只要学生能够正确理解图表的含义, 并将其转化成数学问题, 问题就会迎刃而解.

2.5 适度综合, 体现一定的层次性

为高等学校选拔人才是高考的主要任务. 试卷在保证难度适中的前提下, 还注重考查学生的综合能力, 以满足人才选拔的要求. 在试题的设计上, 注意层次性, 让不同能力水平的学生都能够得到充分的展示. 主要体现在以下两个方面:

通过解法的多样性来甄别学生的能力水平. 试卷设计了较为灵活的问题, 这些问题解法多样, 不同的解法用时迥异, 从对解题策略的选择中可以反映出考生不同的能力水平. 例如, 第8题可以用多种不同方法得出结论, 读图能力、理解能力、观察能力强的学生可以直接看出结论, 而在这方面能力比较弱的学生则需要花较多的时间和精力. 第16题也是如此.

对综合性问题的解决能力是一个学生综合素养的集中体现. 试卷中设计了一定的综合性问题, 用以考查学生是否具备综合运用数学知识和方法解决问题的能力. 例如第18题第3问, 求使得不等式 $x \in (0, 1)$ 恒成立的参数 k 的最大值; 第19题第2问, 判断是否存在满足特定条件的点, 若存在, 求点的坐标, 若不存在, 说明理由; 第20题的后两问. 这些问题, 对学生而言都有一定的挑战性.

3 试卷的数据分析与典型试题解析

3.1 数据分析

一年一度的高考每年都会引起人们的众说纷纭, 最受关注的还是试卷难易程度, 这可以通过试卷的难度系数来体现. 事实上, 一份好的试卷除了难度要合理, 还应该有良好的区分度. 区分度(相关系数)则反映了题目对不同的考生的区分程度或鉴别能力. 科恩(1998)对区分度(相关系数)的划分曾提出了如下的建议:

相关程度	负相关	正相关
低	-0.29 至 -0.10	0.10 至 0.29
中	-0.49 至 -0.30	0.30 至 0.49
高	-1.00 至 -0.50	0.50 至 1.00

2013—2015年数学试卷题目区分度的分布如下表:

表2 文科试卷不同区分度题目的分值分布

区分度 (相关系数)	$ r \leq 0.29$	$0.3 \leq r \leq 0.49$	$0.5 \leq r $
2013年	27分	43分	80分
2014年	15分	57分	78分
2015年	15分	45分	90分

表3 理科试卷不同区分度题目的分值分布

区分度 (相关系数)	$ r \leq 0.29$	$0.3 \leq r \leq 0.49$	$0.5 \leq r $
2013年	15分	35分	100分
2014年	15分	50分	85分
2015年	10分	50分	90分

从上面的表、表可以看出, 2015年试卷的区

分度与 2013 年相比,文科试卷低区分度的题目分值大幅降低,与 2014 年相比,低区分度题目分值持平,但高分度题目明显好于前两年.理科试卷低区分度的题目分值比前两年都低,高分度题目比 2014 年要高.

总体上,文理科试卷的区分度均好于前两年.

3.2 典型试题解析

下面对一些典型试题从命题意图、主要错误、教学建议等几方面进行分析,希望通过这些分析能够和教研人员、一线教师、学生沟通思想,实现教学与考试的良性互动,促进素质教育的实施.

例 1 设 $\{a_n\}$ 是等差数列. 下列结论中正确的是

- (A) 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$
- (B) 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_1 + a_2 < 0$
- (C) 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
- (D) 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

(1) 命题意图

本题考查的是等差数列的基本知识. 数列是高中数学课标中的重点知识,也是历年高考必考的内容,但是近年来对数列的考查,大多集中在对数列的运算和证明等基本技能的考查上. 课标对数列的教学建议中指出,应该掌握数列中各量之间的基本关系,今年这个数列问题考查的是考生对“数列是按一定次序排列的一列数”“等差数列是每一项和前一的差是定值的一列数”这些基本概念的认识,设问新颖,避开了模式化的解题思路,达到了对数列基本知识和基本概念的考查要求. 事实上,这种考查方式在 2014 年的试题中已经有所体现,2014 年北京市理科试卷第 5 题也是对数列的基本概念的考查. 为了方便我们把试题呈现如下:

设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的

- (A) 充分而不必要条件
- (B) 必要而不充分条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既不充分也不必要条件

本题考查的是充要条件、等比数列的通项公式以及等比数列的简单性质,2014 年本题的难度为 0.34,是选择题里面难度值最低的.

注重对基础知识和基本技能的考查,并不是倡导死记硬背,题海战术能解决的,而是要考查学生对基础知识、基本概念真正的理解和掌握.

(2) 主要错误

在全部考生中,选(A),(B)的考生占全体考生的 10%,选(D)的考生占全体考生的 5.34%. 选(A),(B)的考生可能是因为不知道否定一个结论要能举出反例,肯定一个结论需要严格证明,找到一个符合选项的例子就以为结论成立,没有经过严格证明. 选(D)的考生可能是因为没掌握等差数列的概念,不知道在等差数列中 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = d$,于是 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \leq 0$.

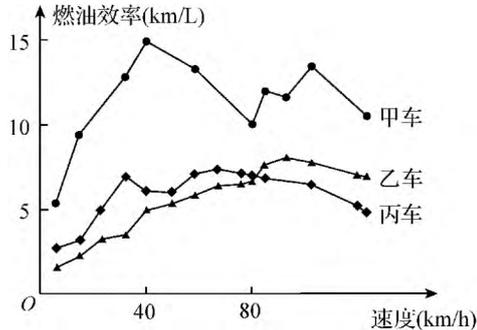
(3) 教学建议

① 在教学过程中要注重对新的概念、公式定理和方法等知识形成过程的教学,让学生能够理解相关知识的来龙去脉.

② 在概念的学习与运用中要注意提高学生的理解能力,使学生能抓住概念、定理的核心以及知识之间的内在联系.

③ 要引导学生准确地掌握概念的内涵及使用的条件和范围.

例 2 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程. 下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况. 下列叙述中正确的是



- (A) 消耗 1 升汽油,乙车最多可行驶 5 千米
- (B) 以相同速度行驶相同路程,三辆车中,甲车消耗汽油最多
- (C) 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时,消耗 10 升汽油
- (D) 某城市机动车最高限速 80 千米/小时. 相同条件下,在该市用丙车比用乙车更省油

(1) 命题意图

高中数学课程要求学生体验数学在解决实际

问题中的作用、数学与日常生活以及其他学科的联系,促进学生形成和发展数学应用意识,提高实践能力.数学科高考一直很注重在试卷中渗透新课标的理念和精神,“贴近生活,关注应用”已经成为北京试题的一个特色.本题是今年理科试卷的一个应用问题,问题的背景源于学生的生活实际,没有以具体的数学知识为背景,而是以能力考查为目的,着重考查的是学生能否读懂题目中的文字和图表,考查学生的阅读理解能力和解决问题的能力,体现了我们“淡化知识,突出能力”的命题理念.

(2)主要错误

在全部考生中,选(B)的考生占全体考生的8.92%,这部分考生是没有读懂图中所给信息,没有理解图中点的纵坐标的意义,它不是消耗的油量,而是在指定速度下每升油可供行驶的路程,所以曲线位置越高,对应的车型越省油,所以甲车消耗汽油最少,所以(B)错.解决本题的关键是读懂图表中的文字和图形的含义,本题对考生的读图、识表的能力有一定要求.

(3)教学建议

① 数学教学要高度重视对数学知识的应用,倡导学生用数学的眼光看世界.

② 结合课标和教材中提供的素材,培养学生从实际问题中分析信息,提取信息并转化为数学问题的能力.

③ 在教学过程中要有意识地揭示数学来源于生活实际的事实,深化数学知识的应用研究,提高学生的创新意识.

例3 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,点 $P(0, 1)$ 和点 $A(m, n) (m \neq 0)$ 都在椭圆 C 上,直线 PA 交 x 轴于点 M .

(I) 求椭圆 C 的方程,并求点 M 的坐标(用 m, n 表示);

(II) 设 O 为原点,点 B 与点 A 关于 x 轴对称,直线 PB 交 x 轴于点 N .问: y 轴上是否存在点 Q ,使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在,求点 Q 的坐标;若不存在,说明理由.

(1)命题意图

本题主要考查椭圆的标准方程、离心率、直线

的斜率、点与椭圆的位置关系、两条直线的位置关系、点关于直线的对称性等基本知识,考查学生运用解析几何的思想方法、方程的思想、数形结合的思想、运动变化的思想和转化的思想分析问题、解决问题的能力,很好地体现了新课标的理念.本题考查的重点是用代数方法探究运动变化中的不变量,突出解析几何的本质特征,解答本题的关键是对条件 $\angle OQM = \angle ONQ$ 的代数化,不同的处理方法带来的计算量的大小相差较大,这就要求学生对各种方法进行判断和选择,避免复杂的运算,提高解题效率,在选择的过程中也反映出考生能力的高低,体现了试题的区分功能.

(2)主要错误

① 几何条件不能合理地进行代数化从而出现了很多转化错误.例如, $\angle OQM = \angle ONQ$ 转化为 $\cos \angle OQM = \cos \angle ONQ$ 之后,错误地转化为 $\vec{QO} \cdot \vec{QM} = \vec{NO} \cdot \vec{NQ}$; 转化为垂直关系时误以为 $QM \perp QN$ 等.

② 考生在证明的过程中出现了明显的逻辑错误.例如,先设出点 Q 的坐标 $Q(0, \pm\sqrt{2})$,再来证明 $\angle OQM = \angle ONQ$; 由特殊代替一般,取点 $B(\sqrt{2}, 0)$,由条件求出 $Q(0, \pm\sqrt{2})$.

③ 考生运算能力欠佳,出现了各种各样的计算错误,例如, $x_M = \frac{m}{n-1}$; $x_A = \frac{4k}{1+2k^2} k_{PB} = \frac{y_B-1}{x_B} = \frac{k}{2}$ 等.

④ 概念错误,例如, $e = \frac{c}{a}$, $a^2 = b^2 - c^2$,点 Q 的坐标为 $Q(\pm\sqrt{2}, 0)$ 等.

(3)教学建议

① 在教学的过程中要引导学生掌握解析几何的基本知识和概念,深入理解解析几何的本质,掌握解决解析几何问题的基本方法,避免简单地套用模式.

② 要加强对解析几何中几何图形的认识,学会分析几何元素之间的联系,并能够把这些关系转化为代数元素之间的关系,从而用代数方法来解决.理解和掌握数形结合的思想.

③ 要加强学生的运算能力,提高运算的准确性;加强学生优化解题策略的能力的培养,提高学

(下转第47页)

解法4 由第(2)小题,知 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$

($x > 0$), 令 $x = \frac{1}{n}$,

则 $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(1+n) - \ln n > \frac{1}{1+n}$,

运用叠加法有

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(1+n) - \ln n) = \ln(1+n) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1+n}.$$

5 解题教学的几点思考

笔者通过本文中这道检测题的教学,感触颇深,有几点想法与读者共勉:

(1) 解题教学要摸准学情,把握好学生思维的起点. 对于很多数学问题,教师与学生的认识往往是不一样的,不能把教师的好方法直接灌输给学生,要从学生的实际出发,遵循学生的认知规律,夯实学生的自然解法,当然还要不失时机地引导学生变换视角看问题,拓展学生的思维空间,提升学生的思维能力,升华学生的思维境界,把教师的自然解法渗透给学生,使他们融会贯通,切实提高解题能力,这样才能有效提高课堂解题教学的效益. 就如本文中检测题的(1)、(3)两小题,教师首先要尊重学生的处理方法,并帮助他们纠正、完善解法,然后再引导学生从数列视角认识问题,使学生对这两题形成深刻的理解.

(上接第42页)

生的优化意识,使学生学会选择最简洁的运算途径,从降低错误率.

4 结束语

北京市的高考命题,根据高考改革的进程,在保持稳定的前提下,努力创新不断探索,力争将课程标准的基本理念和目标要求在考试中得到体现. 经过多年来探索、研究,形成了以考查学生科学素养和数学能力为主线的命题风格,试卷中很多试题成为中学教师教学的典型案例. 虽然在一些内容和能力的考查方面,我们和一线师生达成了共识,但是就命题而言,需要思考和改进的地方还

(2) 解题教学要重比较,重分析. 一类数学问题往往有不同的解决方法,这些解决方法的优劣又受具体问题的影响,就如恒成立问题,可用分离参变量法,也可直接构造函数,到底哪种方法简单,不能一概而论,因此,我们平时的解题教学要多比较、多分析,让学生逐步建立解题经验,碰到具体问题,他们才会独立分析,才能选择合适的方法解决问题. 本文中的第(2)小题,我们不仅要让学生知道直接构造函数往往需要对参数讨论,但有时也比分离参变量法简便,还要让学生知道何时用分离参变量法会出现 $\frac{0}{0}$ 型分式,让学生碰到具体问题做到心中有数.

(3) 课堂例题要少而精,数量不宜太多. 笔者认为例题过多会增加学生的入题时间,选择少而精的例题能减少学生思维的断层,教师可通过探究、变式、一题多解等手段,来加强学生思维的连续性,从而调动学生的学习积极性,这就需要我们教师在选题上下功夫,在例题的解题教学上下功夫,找准课堂的主攻方向,是通过问题探究激发学生的兴趣? 还是通过一题多解构建思想方法? 等等. 本节课只讲了一道检测题,但课堂教学任务明确,一是让学生深化理解问题,让数列知识学以致用;二是让学生理解恒成立问题的解法差异,学生的思维量并不小,他们获取的信息并不少.

有很多.

本文着重分析了2015年数学试卷的特点和部分试题的命题意图,希望能与一线中学老师共同研究,使得北京数学高考能更好地发挥区分功能和导向功能.

参考文献

- 1 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2003版)[M]. 北京:人民教育出版社,2013
- 2 北京教育考试. 普通高等学校招生全国统一考试北京卷考试说明[M]. 北京:开明出版社,2015
- 3 雷新勇. 大规模教育考试:命题与评价[M]. 上海:华东师范大学出版社,2006