

数学学科能力及其表现研究

曹一鸣¹ 刘晓婷² 郭 衍¹

(1. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875; 2. 北京教育学院 初等教育系, 北京 100120)

摘要:从学习理解、实践应用、创造迁移三个维度,九个子维度构建了学生数学学科能力测试框架。针对中学生开发了数学学科能力测试工具,通过对B市H区8~12年级(测试内容为7~11年级)的2571名学生分层抽样测试,研究发现:(1)学生总体数学能力表现呈递增趋势,但基础能力在高级别出现下滑;(2)不同类别的学校之间存在显著差异。

关键词:数学学科能力;Rasch模型;数学素养

中图分类号:G633.6 文献标识码:A 文章编号:1673-1298(2016)04-0073-06

DOI:10.14082/j.cnki.1673-1298.2016.04.011

学生通过数学学习应该获得哪些能力?或者说,数学教学所应促进的核心能力以什么样的具体形式表现出来?已有研究并未达成统一的认识。注重能力导向的数学教学与评价已经形成共识,因此,数学学科能力的评价成为迫切需要解决的重要的课题,构建数学学科能力表现的测评框架,则成为其中的核心问题。

本文聚焦数学学科能力测评框架与测评工具的开发,以及中学生数学学科能力表现的测评为载体,着重研究了以下两个方面的问题:(1)中学生数学学科能力的构成和评价指标体系;(2)中学生数学学科能力整体表现。

一、数学学科能力构成及其表现 测评的研究概述

(一)数学学科能力的构成

关于数学能力结构的研究一直是一个重要的课题,国外研究中最引人关注的是国际数学教育委员会秘书长,丹麦罗斯基特大学(Roskilde Universi-

ty)Mogens Niss 教授给出的“数学能力花”模型。在此模型中,数学能力分为两个方面:(1)数学地理解并解决问题,包括:数学思维能力、问题解决能力、建模能力、推理能力;(2)使用数学语言和工具交流,包括:数学表达能力、符号化和形式化能力、数学沟通能力以及使用辅助工具的能力。Niss指出:这八个能力并不相互独立,整组能力之间应存在非空交集,八个组成部分不构成数学能力概念的划分,每个能力都有它的特性和“侧重点”,每个能力都会涉及其他能力的二次激发。^[1]PISA2000 最初发布的数学能力测试框架也强调了这八种数学能力。

林崇德教授认为,“数学能力是以数学概括为基础,将运算能力、空间想象能力和逻辑思维能力与思维的深刻性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性所交互组成的统一整体,是由三种能力与五种思维品质交叉成15个结点的开放性动态系统”^[2]。

在我国长期流行的提法是三大能力,即数学的“运算能力、空间想象能力和逻辑运算能力”^[3]。《义务教育数学课程标准(2011)》明确提出:“运算能力”

收稿日期:2016-04-28

作者简介:曹一鸣(1964—),男,江苏人,北京师范大学数学科学学院教授,主要从事数学教育研究;刘晓婷(1983—),女,北京人,北京师范大学数学科学学院博士生、北京教育学院初等教育系讲师,主要从事数学教学论、教师教育研究;通讯作者:郭衍(1988—),男,江苏人,北京师范大学数学科学学院博士后,主要从事数学教育评价与测量、教育技术研究。E-mail:guokan@bnu.edu.cn

基金项目:本文获国家自然科学基金“十二五”规划2011年度教育学重点课题“中小学生学科能力表现研究”(课题批准号AHA110005)资助。总课题由北京师范大学王磊教授主持,9个学科组成的学科教育团队协同研究。“中小学生数学学科能力表现研究”子课题负责人是北京师范大学曹一鸣教授,核心成员有:刘晓婷、郭衍、陈鹏举、冯启磊、王振平、李春雷、张晓旭、刘金花、刘东等。

“推理能力”作为中学数学的核心概念，并在课程目标中提出，“增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力”。^[4]

(二) 数学学科能力的表现测评框架

国际大型测试 TIMSS 的数学能力测试框架是一个二维框架，包括内容维度和认知维度。内容维度界定测评涵盖的特定内容，认知维度说明学生解决相应题目时所需要的能力，并以认知水平来界定能力水平，能力水平包括了解(knowing)、应用(apply)、推理(reasoning)，每一个方面进一步被细分为众多子项。^[5]

PISA 2012 数学素养模型包括四维度架构：(1) 情境维度，即问题情境，指 15 岁学生所可能面临的各种问题，具体包括个人生活的、职业的、社会性的、科学性的四种情境；(2) 学科领域(内容维度)，即空间和图形(space and shape)，变化和联系(change and relationships)，数量(quantity)，不确定性(uncertainty)，(3) 过程维度，即三种数学过程和七种数学基本能力。能力为：交流，数学化，表述，推理和论证，设计问题解决策略，运用符号的、正式的、技术的语言和运算以及使用数学工具。(4) 认知能力水平”。^[6]

学科能力的评价模型通过学科能力来体现学科目标，并用学科内容领域、认知要求、表现水平与描述、问题情境对学科能力加以描述。^[7] 上述学科能力测评框架，为本研究奠定了理论基础。

二、数学学科能力构成及概念界定

《国家中长期教育改革发展和规划纲要(2010—2020 年)》提出的四大战略主题之一即为“坚持能力为重”，指出：提高学生的“学习能力、实践能力、创新能力”。^[7] Robert Sternberg 也提出人类智力的三元论(triarchic theory of human intelligence)，认为智力有三个相互关联的方面：分析能力(analytical ability)、创造能力(creative ability)、实践能力(practical ability)。^[8] 本研究基于“学习—应用—创新”的学科能力概念和构成要素，依托“中小学学科能力表现研究”项目提出的学科能力表现测评的基本框架：学科内容维度和心智水平维度。^[9] 在相关研究的基础上，本研究构建基于“学习—应用—创新”的数学学科能力表现指标体系，使得学科能力可调控、可干预、可观测、可评价。

数学学科能力是数学学科发展中经过长期积淀

而形成的，蕴含于数学学科内质中，它脱离不了具体的数学知识和数学活动，数学学科能力存在于数学活动之中，并在数学活动中加以揭示，在数学活动中形成和发展着。数学活动的进步并非单独依靠一种能力，而是依靠多种能力的复合。^[10] 而数学学科主要活动包括：数学计算、数学证明、数学建模，对应着数学意义上的运算能力、推理能力、问题解决能力。

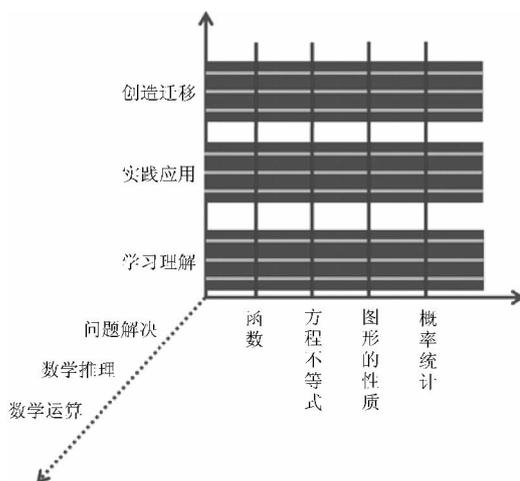


图 1 中学数学学科能力表现理论模型

依据数学学科的特点、学生学习的内容类型、学习的智力活动特点等，本研究基于对数学学习理解能力、数学实践应用能力和数学创新迁移能力的文献综述，对三个能力及其九个子维度进行界定。

A 数学学习理解能力是指学生在数学学习过程中的记忆、概括和产生联系的过程。学习理解是数学知识的输入、内化过程。其二级指标如下。

A-1 观察记忆 是指通过观察，从长时记忆系统中提取与呈现材料一致的知识或提取相关知识，包括再认和回忆。

A-2 概括理解是把某些具有一些相同属性的事物抽取出现本质属性，推广到具有这些属性的一切事物中^[11]，并正确地以多种方式表征数学知识(用数、图表、符号、图解或词语)。考查学生数学符号意义的概括、数量关系的概括、图形特征的概括以及简单关系和简单运算与推理的概括。

A-3 说明论证是指学生在记忆、概括的基础上，能够在知识内部，学生能提取相关知识，选择和运用简单的问题解决策略，使用基于不同信息来源的表征，对其进行直接推理，解释现实的问题。学生能将重要的和不重要的信息区分开来，然后专注于重要信息，根据数学规则、原理做出解释、推理、判断的能力。

B 数学实践应用能力是指学生在给定的数学情境中使用程序化的方法完成简单任务、或在稍复杂的问题情境中提取相关知识分析解释问题,在条件冗余的情境中提取有用信息,分析并解决问题。实践应用是知识的输出过程,此维度与程序性知识、概念性知识、反省认知知识紧密相关,但对事实性知识的记忆是进一步实践应用的前提。其二级指标包括如下方面。

B-1 分析计算是能够在熟悉的数学问题情境中直接应用数学知识进行作图、列式、计算解决问题。主要考察熟悉情境中,数学内容直接且呈现清晰的一步应用问题或简单的多步应用问题,以及几何领域有固定程序的作图问题、统计领域的统计图绘制问题。^[12]

B-2 推测解释是在较熟悉的实际任务情境中,学生能提取相关知识,选择和运用简单的问题解决策略,使用基于不同信息来源的表征,对其进行直接推理,解释现实的问题。学生能将重要的和不重要的信息区分开来,然后专注于重要信息,根据数学规则、原理做出解释、推理、判断的能力。

B-3 简单问题解决是在不熟悉的任务情境中,学生选择、提取有用的数学信息,自行组织数学策略,建立数学模型,解决问题并完整表达解决过程。在本测试维度,问题一般包含较复杂或冗余的数学信息,学生需要根据问题情境提取有用的数学信息,选择适当的策略,寻找合适表征模式,通过较复杂的决策解决问题。在解答过程中,要求完整解题步骤,并汇报结果。

C 数学创造迁移能力是在数学学习理解、实践应用基础上形成的高阶的认知过程,是高级的知识输出过程。涉及将要素组成内在一致的整体或功能性整体,要求学生在心理上将某些要素或部件重组为不明显存在的模型或结构,从而生成一个新产品。涉及创造的认知过程通常需要学生先前的学习经历的配合。其二级指标包括如下方面。

C-1 综合问题解决 是指知识的综合、方法的多样化以及数学思想方法的综合运用。具有知识容量大、解题方法多、能力要求高、突显数学思想方法的运用以及要求学生具有一定的创新意识和创新能力等特点。从题设到结论,从题型到内容,条件隐蔽,变化多样。需要跳出固有思维模式,分辨、选择出有用的数学信息灵活解决问题。

C-2 猜想探究是指在开放的问题情境中,借助已有的知识经验,对数学材料进行加工,创造性解决问题。想象创意是一种高级的认知过程,学生在数学问题情境中凭借记忆所提供的材料进行加工,从而产生新的形象。学生将过去经验中已形成的一些暂时联系进行新的结合,是逻辑思维、形象思维、逆向思维、发散思维、系统思维、模糊思维和直觉、灵感等多种认知方式综合运用结果。

C-3 发现创新能够从已有知识和技能出发,通过猜想与合情推理构建知识之间的远联系,或提出发现新的好问题。发现创新将涉及高水平概括,发现知识本质的联系;发现新的知识或规律;在多个概念进行联系。^[13]

三、数学学科能力表现测评工具的研发与测试简介

(一) 测评工具的研发过程

学生数学学科能力测试工具的开发首先是根据研究文献,界定学生数学能力及各级指标体系涵义,并构建测试框架。以中学测试工具的开发为例,在整体设计框架的基础上,针对中学生的具体情况,组建了由数学教育研究者、中学数学教研员、一线优秀中学数学教师组成的中学数学学科能力研究团队。研究者对整个团队进行学科能力指标体系的解读,提供样题进行讨论,并收集国内外各种测试中的典型题目,在研究团队的协助下开发学科能力测试题目,在每个内容领域的每个能力维度二级指标下都有测试题目,研究者依据双向细目表(双向细目表分为内容维度和能力维度,内容维度与教师数学教学知识测试的内容维度相对应,能力维度包括3个一级指标,9个二级指标,经过筛选、讨论,形成大约正式测试题量1.5—2倍的预测试试卷,选择某中学每个年级的男女各6名学生,经过发声思维测试记录并修改试题中词不达意的问题、语义含混的问题等,并选择最终测试样本所在的B市H区中进行修改测试工具后的小样本测试,通过小样本测试初步分析测试工具的信度、难度、区分度、试题的拟合度等。最后通过数学教育领域的权威专家对小样本测试工具的结构效度等问题进行讨论论证,形成最终的测试工具。

(二) 测评工具的质量评估

基于CTT理论的试卷质量分析得到,该测试

卷的难度为 0.60,区分度介于 0.30~0.83 之间,其中区分度达到 0.40(良好)以上的题目约占 78%。测试使用内部一致性来衡量试卷的整体信度,Cronbach's α 系数 ≥ 0.70 ,信度良好。利用 Winsteps 软件单维 Rasch 模型检验测试工具总体信度。利用 ConQuest 软件多维 Rasch 模型模型试题信度。用单维 Rasch 模型检验测试工具的学生信度为 0.93,试题信度为 0.997,测试工具信度良好。利用 ConQuest 软件进行多维 Rasch 模型运算,所得学习理解、实践应用、创新迁移三个学科能力要素维度的信度分别为 0.80、0.84、0.85 均大于 0.8,信度良好。全部试题(内容和活动)的单维运行结果中,INFIT MNSQ 的最大值为 1.14,最小值为 0.87,测试点对应的试题 INFIT MNSQ 值在 0.8~1.2 之间,表明试题与模型的匹配度较好。

(三)测试对象与评分简介

本研究采用分层随机抽样的方法,根据该区提供的学校分组名单,从 3 个组中随机各抽取 3~4 所中学,共 11 所中学,在学校内部再采用随机抽样的方法从 8—12 级从每个年级中抽取约 50 名学生参加正式测试,本测试有效数据为 2 571 人。

阅卷组由 80 名一线数学教师、教研员及数学专业研究生组成。研究者对阅卷组成员进行培训,逐一讲解评分标准(简答题和解答题)。进行集体出声预评,抽取每个年级各 25 份试卷,集体评分,并对评分标准理解不一致的地方进行讨论。再分别抽取各年级试卷各 10 份,阅卷者两两评分后计算评分一致性系数,保证评分一致性系数在 90%以上,试卷初步阅完后,再交换试卷进行互相检阅。期间,阅卷组长和研究人员会在各组抽检 10%的试卷进行抽查检阅。

本研究采用书签标定法划定学科能力表现水平等级,基本程序如下:综合考虑试题的学科能力要素指标、认识方式指标和用 Rasch 模型处理测试数据后得到的试题难度值三个因素,通过逻辑分析初步划定水平等级;再用 SPSS20.0 对各水平进行单因素方差分析,检验各水平间是否存在显著性差异;最后确定各水平所对应的试题难度值范围。

四、数学学科能力表现评价研究的主要结果

(一)中学生数学学科能力总体表现水平

运用单维 Rasch 模型对全部测试数据进行处

理得到试题难度值,得到中学数学学科总体学科能力表现的 Item-map,依据试题难度值及试题指标,以认识方式水平—问题情境陌生度—学科能力要素作为水平划分依据,将学生的学科能力表现划分为 4 个水平。全部样本在各水平的人次百分比分布如图 2 所示。

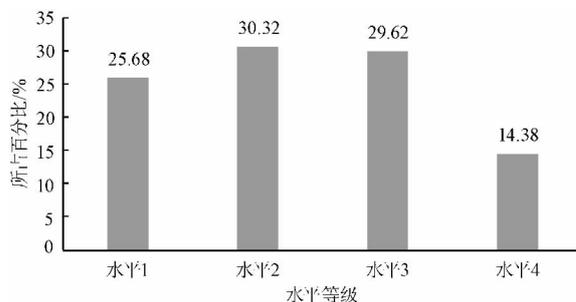


图 2 全部样本的水平等级分布

全体学生的中学数学学科能力表现水平总体分布在水平 1—水平 4 之间。25.68% 的学生处于水平 1,即仅能够对核心知识或核心活动进行辨识、记忆。30.32% 的学生处于水平 2,即能在简单情境中回忆事实性知识(如定义、性质等),识别解决具体问题所需要的算法、法则和公式等,能根据法则,进行正确的计算,能对结果的意义进行解释,通过举例等验证结果和数学结论。29.62% 的学生处于水平 3,即能用模型、自然语言、图表、数或字母等多种方式表示概念,能在复杂情境中识别解决具体问题所需要的算法、法则和公式等,并通过列式计算、画出图表等解决问题,能对结果的意义进行解释。14.38% 的学生处于水平 4,即能识别出复杂情境中的数学对象,根据对象的意义、性质判断对象的属性以及与其相关对象之间的联系和区别。通过信息的重组,获取解决问题的有效信息,并做出合理的假设与推断;通过分析情境中的数学关系,发现内在联系,构建数学模型,并运用知识、方法等解决非常规问题。

(二)中学生在“学习理解—应用实践—创造迁移”各能力要素的表现水平

用多维 Rasch 模型分别对测查数据进行学习理解、实践应用、创造迁移三个维度运算,得到三维试题难度值和学生能力值。依据全部样本在学习理解能力、应用实践能力、创造迁移能力表现的 Item-map,以认识方式水平—能力要素作为水平划分依据,将学习理解能力、实践应用能力和创造迁移能力表现分别划分为 4 个水平。全部样本在学习理

解、实践应用、创造迁移能力表现平均水平如表 1 所示,各水平的人次百分比如图 3 所示。

表 1 全部样本在学习理解—应用实践—迁移创新各能力要素的平均水平

能力要素	学习理解	应用实践	迁移创新
平均水平	水平 3	水平 2	水平 2

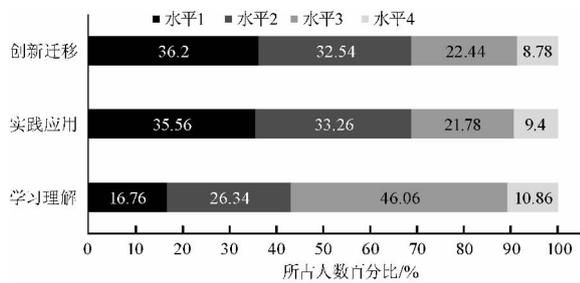


图 3 全部样本在学习理解—应用实践—创新迁移各能力要素的水平分布

学习理解水平 3 是指:能在较为复杂情境中回忆事实性知识(如定义、性质等),根据法则,准确计算,能使用工具进行测量、根据给定的条件进行作图。

实践应用水平 2 是指:能用模型、自然语言、图表、数或字母等表示的概念,并能举出一些实例,在简单的问题情境中识别解决具体问题所需要的算法、法则和公式等,并通过列式计算、画出图表等解决问题,能对结果的意义进行解释。

创造迁移水平 2 是指:能从给定的信息中做出假设与推断,通过举例等验证结果和数学结论,能运用多样的策略与方法解决简单的非常规问题,能对解决一类问题的知识与方法进行简单总结和反思。

(三) 各年级的中学数学学科能力表现

各年级样本的数学学科能力总体表现各能力要素表现如图 4 所示。

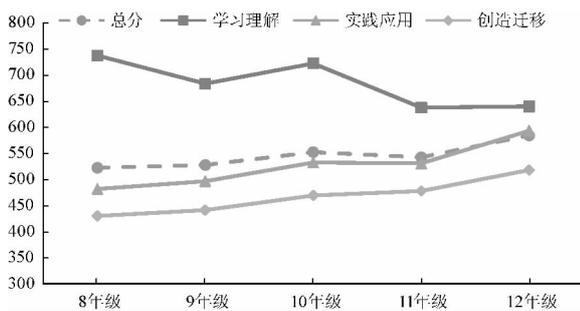


图 4 各年级的总体表现及各维度能力要素的表现

综观 H 区 8~12 年级的学生的总体表现得分呈现出逐年递增的趋势。在 A 学习理解、B 实践应

用、C 创新迁移三项能力的发展中,学习理解能力表现总体优于实践应用、创新迁移。但同时也发现,学习理解在高年级出现了下滑的趋势;而实践应用和创新迁移基本呈现递增趋势。需要强调的是,本研究并非是追踪研究,故各年级学生并非同一群体,不能在严格意义下解释为学生学习理解能力随着年级增长而下滑,但本研究采用全学区分层随机抽样的调查研究设计,可以在一定程度上排除不同年级参测学生的群体异质性。另外,进行的学生调查问卷中,可以发现类似的趋势,学生自陈的“学习理解”活动随着年级的增加逐渐减少,这是该区教学中存在的客观问题,需要引起重视。

(四) 不同类别学校数学学科能力表现比较

表 2 不同类别学校各年级各维度表现(以 8 年级为例)

	一类校	二类校	三类校
数学能力总体表现	577.25	506.23	452.03
学习理解能力	794.13	741.90	661.33
实践应用能力	545.95	459.47	399.85
创造迁移能力	479.60	414.17	368.85
函数	574.65	473.33	374.23
方程不等式	578.45	500.47	426.95
图形的性质	550.48	479.63	429.70
概率统计	682.23	624.13	569.65

以 8 年级为例,三类学校之间在各个能力维度上的均值表现差异显著。通过单因素方差分析各能力维度和内容维度,发现不同维度上三类学校之间在各能力维度和内容维度 Sig 值均为:0.000,即各类学校的学生在各能力维度和内容维度的均值的差异显著。

观察各维度的均值差异还可以发现,在能力维度方面,三类学校之间差异较大的是实践应用能力和创新迁移能力;在内容维度方面,三类学校之间差异较大的是函数。结合第三部分的分析结果可以得知,基础能力——学习理解能力在很大程度上制约了学生数学能力的整体表现,而数学能力表现优异的学生在高阶能力——实践应用、创新迁移能力上表现的更为突出。

五、数学学科能力表现研究结论

通过本研究,得到结论和建议如下。

第一,学生在数学学科能力总体表现良好。大

部分学生的数学能力表现介于水平2和水平3之间,即能在一定的情境中回忆事实性知识(如定义、性质等),识别解决具体问题所需要的算法、法则和公式等,能根据法则,能用模型、自然语言、图表、数或字母等多种方式表示概念,通过列式计算、画出图表等解决问题,并对结果的意义进行解释。

第二,学生数学能力及发展存在差异。从结果可以看出,三类学校在不同主题、不同能力、不同年级之间出现了差异化发展。特别是三类学校的学生与一类和二类学校的学生在不同内容维度和不同能力维度的表现均存在显著差异。总体来看,学生的数学能力发展呈上升趋势,但学习理解能力在高年级存在下滑的现象,结合问卷调查结果,该学区在高中阶段需要对基础能力相关的教学活动引起重视。

第三,正视能力差异,保持优势能力。比较发现,一类校和三类校之间差异最大的为高阶能力(实践应用和创新迁移),并且学生的“实践应用”和“创新迁移”的得分在五个年级间也表现出了递增趋势。该学区在学生高阶能力的培养方面总结教研成功经验的同时,也应继续优化与推广。

参考文献:

[1] Turner R. Assessing Mathematical Literacy[M]. SPRINGER INTERNATIONAL PUBLISHING AG, 2014.

- [2] 林崇德. 论学科能力的建构[J]. 北京师范大学学报:社会科学版, 1997(1): 5-12.
- [3] 课程教材研究所. 20世纪中国中小学课程标准·教学大纲汇编(数学卷)[J]. 北京:人民教育出版社, 2001.
- [4] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011年版)[M]. 北京:北京师范大学出版社, 2012.
- [5] 张伟平. TIMSS测试的认知诊断评价标准下中美学生数学能力比较[J]. 数学教育学报, 2010(4): 66-69.
- [6] 董连春,曹一鸣,攀登数学教育研究的高峰——第39届国际数学教育心理学大会综述[J]. 数学教育学报, 2016(2): 1-10.
- [7] 中华人民共和国教育部. 国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)[J]. 北京:人民出版社, 2010.
- [8] Sternberg R, Sternberg K. Cognitive psychology[M]. Nelson Education, 2016.
- [9] 王磊. 学科能力构成及其表现研究——基于学习理解、实践应用、迁移创新导向[J]. 教育研究, 2016(9).
- [10] 克鲁捷斯基. 中小学数学能力心理学[M]. 李伯黍,等译. 上海:上海教育出版社, 1989: 83
- [11] 涂荣豹,陈嫣. 数学学习中的概括[J]. 数学教育学报, 2004, 13(1): 17-22.
- [12] 童莉,张号,张宁,义务教育阶段学生数据分析观念的评价构架建构[J]. 数学教育学报, 2014(2): 45-48
- [13] 郭衍,曹鹏,杨凡,等. 基于课程标准的数学学科能力评价研究——以某学区七年级测试工具开发及实施为例[J]. 数学教育学报, 2015(2): 17-21.

Composition and Performance of Mathematics Competency

CAO Yi-ming¹, LIU Xiao-ting², GUO Kan¹

(1. School of mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. Beijing Institute of Education, Beijing 100120, China)

Abstract: For our mathematics is the ability to define “computing ability, space imagination ability and logical ability”, it contains within mathematics stroma present in the teaching activities. Based on the characteristics of mathematics, The authors built mathematics competency test framework with three major dimensions—apprehension, application, and innovation, and nine sub-dimensions. Furthermore, the authors developed secondary school mathematics competency test instrument and applied the instrument on 2 571 students selected through stratified sampling from the 8th–12th grades (the test used teaching content for 7th–11th grades) from H District B City in North China. The results show that: 1) the score of mathematics competency increases with grade; but the basic competency performance declined in higher grades; and 2) there were significant differences among different types of schools.

Key words: mathematics competency; Rasch model; mathematics accomplishment

(责任编辑 王本陆)