

# 初中数学教科书代数内容分布的国际比较研究 \*

吴立宝 曹一鸣

**摘要：**本文对中国、美国、澳大利亚、英国、法国与新加坡六国现行的初中教科书代数内容从整体与年级两个方面进行了比较分析。总体上，六国教科书之间代数内容分布是不均衡的，差距是显著的。六国教科书代数内容整体平均分布比重为 38.5%，超过均值的有美国、新加坡与中国三个国家教科书，美国 IM 教科书最高，达到 49%。在年级分布上，美国、法国、新加坡以及澳大利亚教科书内容分布随着年级增加而逐步递增，差异在于增幅的大小；中英两国教科书三个年级分布比较均匀，年级变化较小。

**关键词：**数学教科书；代数；内容分布；比较研究

**作者简介：**吴立宝 / 天津师范大学教师教育学院副教授，博士，硕士生导师(天津 300387)

曹一鸣 / 北京师范大学数学科学学院教授，博士，博士生导师，全国数学教育研究会理事长(北京 100875)

## 一、问题提出

纵观百年来历史上具有重大影响的历次教育改革，基本都以科技的发展为背景，以课程的改革为核心。<sup>[1]</sup>譬如 20 世纪 50-60 年代的“新数运动”、70 年代的“回到基础”、80 年代的“问题解决”以及 90 年代的反思，新世纪到来之际爆发的“数学战争”，再次强调基础，均是从课程开始改起的，并且是以数学课程改革作为导火索或者突破口。数学学科一直是世界各国历次基础教育课程改革的重心，引领着基础教育改革。而其中数学课程内容的选择始终是数学历次课程改革的最基本问题，选择什么课程内容？选定的课程内容各部分如何分布？在各个年级如何分布？前后之间有什么关联？这些需要进行研究取证，找到部分令人信服的证据，而不是建立在经验层面上。

课程内容在各个国家数学课程标准中有不同程度的规定以及相应的年级安排，如康玥媛对澳大利亚第一个全国统一课程标准 The Australian Curriculum Mathematics 研究分析，“数与代数”在 1-10 年级分布都是最多的；<sup>[2]</sup>刘长明，孙连举曾对中美初中学段“数与代数”内容标准进行了比较；<sup>[3]</sup>康玥媛，曹一鸣对中英美三国小学、初中数学课程标准内容主题、内容总体分布等做了量化分析；<sup>[4]</sup>曹一鸣、严虹以中国大陆、新加坡、

韩国、芬兰、加拿大、澳大利亚、德国、法国、英国、俄罗斯、美国、南非 12 个国家最新的高中数学课程标准作为研究对象，首先从数与代数、图形与几何、统计与概率、微积分、其他共五个知识领域中对于标准的内容条目进行统计比较。<sup>[5]</sup>但是，数学课程标准是宏观架构思考与设想，并且在各个国家中，数学课程标准的地位与作用差异悬殊，其规定详略也不一致。相对而言，数学教科书中对课程内容表述更为详细具体，对其研究更有意义。

代数在学校课程中的重要性和学生学习代数面临的困难，是世界各国数学教学具有共性的问题。<sup>[6]</sup>因此对各个国家教科书代数内容进行量化比较分析研究，显得尤为重要，可以获得更多信息。我们曾对中国、澳大利亚、美国、英国、法国、德国、韩国、新加坡、日本与俄罗斯十国的现行教科书作为研究对象，从数与代数、图形与几何(包括测量)、统计与概率三个领域进行了比较，初步了解分布状况。<sup>[7]</sup>代数作为“数与代数”领域核心组成部分，需进一步整体与局部进行细化研究。

## 二、研究设计

### 1、研究国家

选择了 2 个亚洲国家：中国、新加坡；1 个美

\* 本文是国家社会科学基金“十二五”规划 2012 年度教育学重点课题“中小学理科教材国际比较研究(初中数学)”(AHA120008)的研究成果。

洲国家：美国；1个大洋洲国家：澳大利亚；2个欧洲国家：英国、法国。六个国家来自四大洲，并且在PISA、TIMSS中表现非凡。

2、研究年级

鉴于六国学制之间的差异，除美国外的五个

国家选择7、8、9三个年级，美国选择对应于初中学段的6、7、8年级作为研究年级。

3、研究文本

所选取六个国家初中数学教科书信息，详见表1。

表1 六国初中数学教科书基本信息一览表

国别	名称	出版社	出版时间	缩写/简写
澳大利亚	Heinemann Maths Zone VELS Enhanced	Pearson 出版集团	2008	HMZ
美国	IMPACT Mathematics	McGraw-Hill Companies	2009	IM
英国	Maths Links	牛津大学出版社	2009	ML
中国	数学	人民教育出版社	2008	PEPM
法国	SÉSAMATH LE Manual	SÉSAMATH 公司出版	2010, 2011, 2012	FM
新加坡	Math Insights Secondary Normal	Pearson 出版集团	2007, 2011年二版	SM

以上教材均与相关国家人员沟通确认，其使用范围广泛，是该国主流教材。

4、研究问题

主要解决以下几个问题：

- (1)各个国家教科书代数内容整体分布情况；
- (2)各个国家教科书代数内容年级分布情况；
- (3)各个国家教科书代数内容分布年级变化情况。

5、研究方法

以六国教科书代数内容所包含的章、节数，特别是所占的页码数作为统计量。后文呈现的统计数据均以页码数为主，章、节数作为参考。

三、研究结果

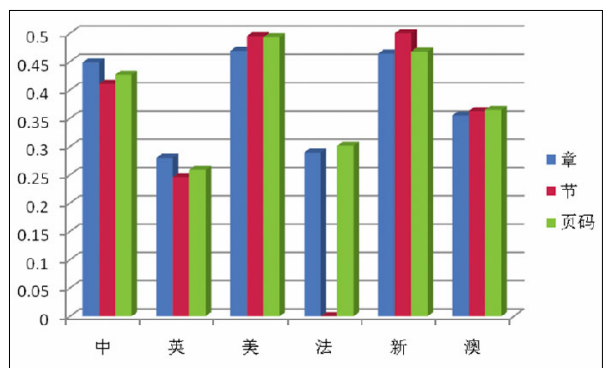
1、六国教科书代数内容整体分布统计分析

如表2所示，六国初中教材代数内容整体分布的章、节、页码三种不同统计量统计数据略有出入，但是三者分布排名未发生变化。PEPM教科书差距最大，HMZ教科书最小。

表2 六国代数内容整体分布比重一览表

国别	章所占比重	节比重	页码比重	排名
中	0.4483	0.4105	0.4268	3
英	0.28	0.246	0.2587	6
美	0.4688	0.4949	0.4928	1
法	0.2895	-	0.3014	5
新	0.4643	0.5	0.4675	2
澳	0.3548	0.3626	0.3647	4

图1 六国初中数学教科书代数内容整体分布图



从图1看出，代数内容在各个国家整个初中教材分布不均衡，国家间的差异显著。美国、新加坡、中国三国教科书代数内容在40%~50%之间；澳大利亚和法国两国教科书在30~40%之间；英国ML教科书低于30%。六国教材代数内容平均分布比重为38.53%，超过均值的教科书有中国、美国、新加坡三国，尤其是美国IM教科书高达49.28%。

美国IM教科书代数内容以49.28%的分布比重独占鳌头，占据三个年级总量的将近一半，具体章节分布见表3，从内容分布上来看非常注重代数内容的学习，个别章节内容与数混在一起。美国IM教科书代数内容分布比重是最低的英国ML教科书的1.9倍，是中国PEPM教科书的1.15倍。譬如代数式部分，美国IM教科书以41个知识点领先于中国PEPM数学教科书(40个)，且有38个知识点是相同的，具有很大的相似性。新加坡SM教科书以46.8%的分布比重排名第二，比美国IM

教科书少 2.53 个百分点,这两个国家数学教科书代数知识的分布比重均介于 45%-50%。

表 3 美国初中 IM 教科书代数内容分布一览表

年级	章	节数	页码
6	第 3 章 模型、数字和规则	4	88
	第 8 章 坐标平面	3	66
	第 9 章 方程	3	44
7	第 1 章 表达式	3	71
	第 2 章 指数	2	52
	第 8 章 线性关系	3	68
	第 9 章 方程	4	58
8	第 1 章 线性关系	3	63
	第 4 章 指数和指数变化	3	60
	第 5 章 代数表达式	3	54
	第 7 章 不等式和线性系统	3	62
	第 8 章 二次关系和反比关系	5	92
	第 9 章 解二次方程	4	58
	第 10 章 函数和图像	2	54
	第 12 章 含代数表达式的分数	2	31

中国 PEPM 教科书代数内容以 42.68% 的分布比重位列第三。在中国,代数内容超过五分之二,比重也是相当高的,涉及代数内容的多个知识领域,单独成章编排,相对来说比较系统,在整个内容广度上与美国比较接近,具体见文献,<sup>[8]</sup>对六国代数式、方程与不等式、函数三个知识主题的知识点分门别类进行了统计分析。澳大利亚 HMZ 教科书代数内容以 36.5% 的分布比重排名第四,法国 FM 教科书代数内容以 30% 分布比重排名第五,英国 ML 教科书排名第六,涉及代数内容最少,仅占 25.86%,这两个国家两套教科书代数知识的分布比重均介于 25%-30%,英国 ML 教科书知识相对中美新教科书而言,显得零散。

2、六国教科书代数内容年级分布统计分析

六国教科书代数内容年级分布的章、节以及页码统计汇总数据如表 4。

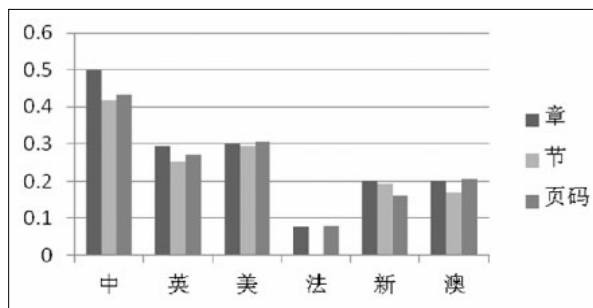
表 4 六国初中数学教科书代数内容年级分布比重一览表

	7			8			9		
	章	节	页码	章	节	页码	章	节	页码
中	0.5	0.4167	0.4337	0.4	0.4194	0.4438	0.4444	0.3929	0.3986
英	0.2941	0.2545	0.2714	0.2778	0.2233	0.2239	0.2667	0.26	0.2813
美	0.3	0.2941	0.3041	0.4	0.4	0.4486	0.6667	0.7714	0.7215
法	0.0769	-	0.0805	0.25	-	0.2512	0.5385	-	0.5308
新	0.2	0.1935	0.1593	0.5	0.5455	0.5421	0.75	0.7667	0.7273
澳	0.2	0.1687	0.2066	0.3636	0.3708	0.3607	0.5	0.5570	0.5273

(1) 七年级分布比较

在 7 年级,代数内容分布比重最高的是中国 PEPM 教科书,达到 43.47%,在章数上占据一半,是最少的法国 FM 教科书的 5 倍多,相比排名第二的美国 IM 教科书多出将近 50%,在中国代数内容学习切入早,在小学阶段已经有代数内容初步知识。美国 IM 教科书以 30.4% 的分布比重排名第二,英国 ML 教科书以 27% 的分布比重位列第三,澳大利亚 HMZ 教科书代数内容以 20.7% 的分布比重排第四,占五分之一,新加坡 SM 教科书代数内容以 15.93%,倒数第二,法国 FM 教科书最少,仅有 1 章占 8.1%,是六个国家代数内容年级分布最小值。美英澳新四国教科书在 7 年级相当大的篇幅在学习数的相关知识,譬如分数、小数的四则运算等相关知识,而这部分内容在中国是小学高段完成的。

图 2 六国七年级数学教科书代数内容分布图



在 7 年级,六个国家初中数学教科书代数内容平均分布比重为 0.2426,大约是四分之一。高于该均值的有中国 PEPM 教科书、美国 IM 教科书、英国 ML 教科书,尤其是中国 PEPM 教科书,是六国年级均值的 1.79 倍,呈现出显著的特色。毕竟在 7 年级,有些国家是代数知识正式学习阶段,虽然

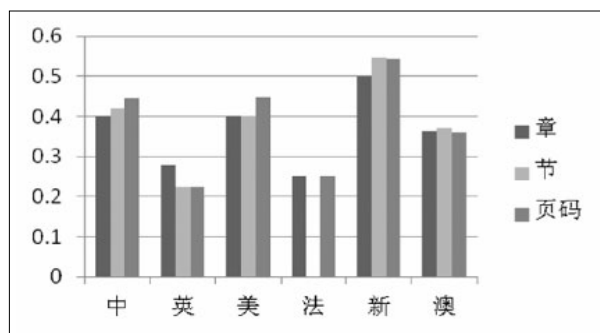
在小学阶段也有所渗透,但是没有正式提出来。

(2) 八年级分布比较

在8年级,代数内容分布比重最高的是新加坡SM教科书,从7年级代数分布比重的第五名飙升到第一名,达到年级分布比重的54.21%,高出排名第二的中国PEPM教科书将近10个百分点。中国PEPM与美国IM教科书分布分别以44.9%和44.4%的比重位居第二和第三,仅仅相差0.0048,处于44%-45%之间,居于第二梯队。澳大利亚HMZ教科书以36.07%排名第四,相比7年级增幅接近90%,居于第三梯队。法国FM教科书代数内容分布比重25.1%,刚好四分之一,排名第五。最少的还是英国ML教科书,仅占22.39%,与法国处于第四梯队。在8年级,相对而言,法国FM教科书是增幅速度最快的,但是由于7年级分布比重太低,因此还是居于倒数第二。

在8年级,六国教科书代数内容分布差距也很大。最高的新加坡SM教科书是最少的英国ML教科书的2.42倍,只是相对而言国家之间的差距倍数减少了。在8年级,六国初中数学教科书代数内容平均分布比重为0.3784,高于均值的有新加坡SM教科书、中国PEPM教科书、美国IM教科书,其余三个国家教科书低于均值,尤其是英法两国教科书差距较大,澳大利亚教科书略微低于均值,相差2个百分点。

图3 六国八年级数学教科书代数内容分布图

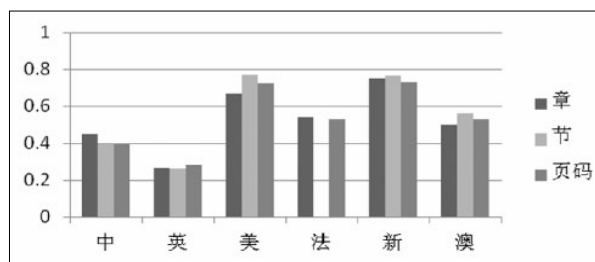


(3) 九年级分布比较

在9年级,六国教科书代数内容分布最高的仍然是新加坡SM教科书,在保持领先的基础上,比重进一步增加,达到72.73%,占据教科书总量的将近四分之三,凸显出对代数知识学习的重视。美国IM教科书略低于新加坡SM教科书0.6%,位居亚军,新加坡与美国两国位于第一梯队,两个

国家分布比重均在72%-73%,具体见图4。

图4 六国九年级数学教科书代数内容分布图



法国FM教科书代数内容以53.08%的分布比重居第三,相对8年级增幅比较大。澳大利亚HMZ教科书略低于法国FM教科书,两套教科书相差0.0035,两国教科书代数内容在9年级都超过了50%,居于第二层次。

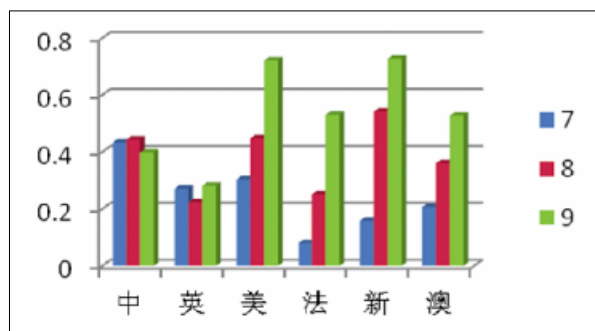
中国PEPM教科书代数内容分布在9年级是最少的,也是三个年级分布的最低值,刚刚接近40%,位居第三层次。最少的还是英国ML教科书,分布比重为28.13%,虽然是其三个年级分布的最高值,但是相对其他国家的增长要低很多,居于第四梯队。

在9年级,代数内容分布比重最高的新加坡SM教科书是最少的英国ML教科书的2.585倍,与8年级基本持平。六个国家初中数学教科书代数内容在9年级平均分布比重为0.5103,高于均值的有新加坡SM教科书、美国IM教科书、法国FM教科书,在这里法国教科书第一次超过年级均值。中国PEPM教科书低于均值十个百分点,是中国三个年级分布的最低值。

3、六国教科书代数内容年级分布变化分析

(1) 美、法、新、澳四国代数分布随年级递增

图5 六国初中数学教科书代数内容年级分布图



以六国初中数学教科书代数内容的页码数为准,统计汇总形成六国教科书代数内容三个年级分布的柱状图5。美国IM教科书、法国FM教科书、新加坡SM教科书以及澳大利亚HMZ教科书代数内容分布均是随年级增加而逐步递增的,增幅是显著的,四国教科书代数内容年级分布的差异在于增幅的大小。美国IM与新加坡SM教科书在9年级代数内容分布分别是72.15%与72.73%,基本上处于同一层次;法国FM与澳大利亚HMZ教科书在9年级达到53.08%与52.73%,处于第二层次。当然四国教科书代数内容分布比重在7年级时起点不同,法国FM教科书最低,仅占8.05%,新加坡16%,澳大利亚21%,美国30%;具体在四国代数内容介绍部分较为详细地阐述了年级增长趋势。

#### (2) 中英两国教科书年级分布相对稳定

相对而言,中国PEPM教科书与英国ML教科书三个年级分布较均匀,年级差距比较小,相对稳定。

中国PEPM教科书代数内容三个年级的分布比重分别是43.4%、44.4%、40%,年级极差为0.0452,年级平均分布比重为42.5%,三个年级分布比较均匀,并且不是随着年级增长而递增的。从7年级到8年级,代数内容分布比重先略微增加;从8年级到9年级,代数内容分布比重不升反而有所下降,达到三个年级分布的最低值。

英国ML教科书代数内容三个年级的分布比重分别是27.1%、22.4%、28.1%,年级极差为0.0574,年级分布均值为25.9%。代数内容年级变化趋势刚好与中国PEPM教科书相反,从7年级到8年级是下降的,而从8年级到9年级后是上升的,年级差距大于中国PEPM教科书,在9年级达到英国ML教科书代数内容分布的最大值。

### 四、进一步结论

#### 1、代数内容分布国家间差异显著

从整体来看,在各个国家教材中分布是不均衡的,差异是显著的。最高的美国IM教科书占将近一半,其次新加坡与中国,三国教科书代数内容在40%-50%之间;澳大利亚和法国两国教科书在30%-40%之间;英国ML教科书低于30%。美国IM教科书代数内容分布比重是最低的英国ML教科书的1.9倍。

从年级分布来看,呈现同样类似的结果,并且

国家内部之间年级分布不均衡。中国PEPM教科书在7年级分布比重是最高的,是法国FM教科书的5倍多,英国、美国教科书更多涉及数的内容学习,还没有过渡到代数知识内容的学习。在8年级,代数内容分布比重最高的是新加坡SM教科书,增长迅速,并且在9年级得以保持,与美国基本持平,最少的还是英国教科书。

#### 2、代数内容的学习容量随年级逐渐增加

六国初中数学教科书代数内容在7、8、9三个年级平均分布比重分别为0.2426,0.3784,0.5103,可以看出六国代数内容总体分布是呈现出递增趋势的。美国IM教科书、法国FM教科书、新加坡SM教科书以及澳大利亚HMZ教科书均体现着这种趋势,其差异在于其增长幅度的大小。众所周知,代数内容知识是逐步抽象获得的,容量是逐步增加的,这个是总体趋势,也是基于心理规律,12-13岁儿童刚好是具体运算到形式运算的过渡阶段在教科书中的反映。毕竟,随着知识抽象程度的增强,学生感觉其学习难度会逐步增大等。

在中国PEPM数学教科书中,代数在7、8、9年级的分布比重分别为0.434,0.444,0.399,在7与8两个年级的分布是高于六国均值的,占比重较高,尤其是在7年级,是六国均值的1.79倍;在9年级中国PEPM教科书低于六国均值将近11个百分点。就整个学段来讲,中国教科书代数内容分布居第三,在六国中也是属于比较重视代数内容学习的国家,在分布上比重可以维持不变。但是代数内容的呈现上可以进一步优化,注重文字语言、图表语言、符号语言之间的转化,更需要注重概念、公式法则的推导过程,重视过程的设计,注重代数内容蕴含的推理,譬如美国IM教科书正文内容是由系列探究组成,以探究为主线呈现内容,注重过程性;<sup>[9]</sup>有些内容可以放在拓展延伸部分或者教科书的数学活动部分,注重内容的延展性,譬如澳大利亚HMZ教科书分为设计任务、作业任务和探究与问题解决任务等。<sup>[10]</sup>在这个学生经历知识的形成过程中理解领悟代数核心思想,形成代数思维能力。<sup>[11]</sup>

纵观六国数学教科书代数内容的分布,这说明“代数”这个知识主题在每个国家的分布情况是有差异的。毕竟这六个国家拥有不同的文化背景,在这个年龄段代数内容的组成上存在差异。

六国教科书代数内容到底哪些内容是共同的?哪些是有差异的?代数内容在各个国家各个年级是如何分布的?代数的核心概念是如何呈现的?这些需要进一步更为细致的研究。

**参考文献:**

- [1] 张永春. 数学课程论 [M]. 南宁: 广西教育出版社, 1996, 12.
- [2] 康玥媛. 澳大利亚全国统一数学课程标准评析 [J]. 数学教育学报, 2011, 20 (5): 81-85.
- [3] 刘长明, 孙连举. 中美初中阶段“数与代数”领域内容标准的比较研究 [J]. 数学教育学报, 2004, 13(4): 45-48.
- [4] 康玥媛, 曹一鸣. 中英美小学和初中数学课程标准中内容分布的比较研究 [J]. 课程·教材·教法, 2013, 33 (4): 118-122.
- [5] 曹一鸣, 严虹. 高中数学课程标准中内容分布的国际比较研究 [A]. 首届华人数学教育会议论文集 [C]. 2014.
- [6] 蒲淑萍. 国外“早期代数”研究述评 [J]. 数学教育学报, 2014, 23 (3): 92-97.
- [7] 吴立宝, 曹一鸣. 初中数学课程内容分布的国际比较研究 [J]. 育学报, 2013, 9 (2): 29-36.
- [8] 吴立宝. 国初中数学教科书代数内容国际比较研究 [D]. 北京: 北京师范大学博士学位论文, 2014.
- [9] 吴立宝, 宋维芳, 杨凡. 国 IM 数学教科书编排结构特点及启示 [J]. 外国中小学教育, 2013, (8): 60-64, 34.
- [10] 吴立宝, 曹一鸣, 董连春. 澳大利亚初中 Heinemann 数学教科书编排结构特点及启示 [J]. 数学教育学报, 2013, 22 (5): 21-26.
- [11] 曹一鸣, 王竹婷. 学“核心思想”代数思维教学研究 [J]. 学教育学报, 2007, 17 (1): 8-11.

**International Comparative Study of Algebraic Content Distribution  
in Junior High Schools Based on Mathematics Textbooks of Six Countries**

**WU Libao CAO Yiming**

**Abstract:** The current mathematics textbooks used in junior high school of six countries, including China, Australia, the United States, the United Kingdom, France and Singapore, are chosen as the objects in this study. The differences of the content between countries are significantly whether in all grades or in each grades. Through analyzing all contents of algebra and its distribution among three grades, the findings in content distribution are concluded as follows: the average percent of algebra is 38.53% in all content, and the percentage in each of three countries(USA, Singapore & China) is higher than the average. The highest is the USA, nearly 49.28%; the percentage of algebra distribution increases with the grades up among USA, France, Singapore and Australia while the increased steps are different. However, the distribution is much equivalent in Chinese and English textbooks.

**Keywords:** mathematics textbooks; algebra; content; distribution; comparative study