发生教学法:起源、理论基础与应用
——以数学教育为例

华中师范大学教育学院　430079　张俊忠
北京师范大学教育学部　100875　綦春霞

德国生物学家赫克尔在 1866 年提出了"生物发生原理",即"个体发育史重蹈种族发展史".[1] 类推于教育得出:个体知识的发生过程遵循人类知识的发生过程.对于数学教育,即"个体对数学知识的理解过程遵循数学知识的发生发展过程."这样要求教师将数学史融入数学教育中,教师需要理解人类是如何获得某些数学概念或事实,从而对学生应该如何理解这些知识作出更好的判断.把数学史作为教学线索,不明确地谈论数学史,用数学史来启示教学,这就是数学发生教学法.

1　发生教学法的起源

古希腊哲学家亚里士多德(公元前 384 - 公元前 322)认为,儿童在发展过程中必须一个时期一个时期地重演人类从野蛮到文明的发展阶段.瑞士教育学家裴斯泰洛奇(1746—1827)认为教学要以人的心理为依据,要寻找和认识教学的心理根源.德国教育家弗罗贝尔(1782—1852)认为每一个注意到自己发展的人,都可以在他自己身上认识和研究种族发展的历史.英国教育家斯宾塞(1820—1903)认为"儿童的教育,无论在方式上,或在安排上,均须与历史上人类的教育相对应."[2]

从语义学上看,发生学来自 17 世纪以来逐渐形成的胚胎学,主要探讨生物学领域的发生发育和演化问题.1759 年,法国医生卡·沃尔夫最先提出,后来由许多学者发展得到一个重要结论是:生物的胚胎发育、个体发育以浓缩的形式重演相应物种的系统发育,称之为"重演律".德国生物学家赫克尔用他自己的话来说,即"个体发生学(个体动物的发展)扼要的重演了系统发育学(动物种类的进化历史)."[1] 类推于教育,即个体知识的发生过程遵循人类知识的发生过程,这就是历史发生原理.

从已有的文献上来看,首先使用"发生教学"这个词的是德国教育家第斯多惠(1790—1866),第斯多惠认为:所有的学科都应接受"发生教学",因为这是学科兴起和进入人类意识的方式[3].德国数学家 F·克莱因(1849—1925)在为中学教师所撰写的《高观点下的初等数学》中,经常从历史发展的角度来引入一个新概念.

历史发生原理的思想在 20 世纪 20 年代就初具雏形.在 20 世纪 50 年代末和 70 年代初,美国和欧洲一些国家出现"新数运动",在中小学介绍大学水平的严格概念,导致学生在学习和理解概念的过程中经历了明显的困难.为了应对"新数运动"中出现的问题,促成了历史发生原理向教学领域的迁移,发生教学法(the genetic approach to teaching and learning)应运而生.数学家托普利(1881—1940)和数学家波利亚(1887—1985)是发生教学法的主要阐述者.

2　发生教学法的理论基础

发生教学法的本质是通过追寻思想的起源,激发学习动机,再研究创始人所做工作的背景,以寻求他试图回答的关键问题.从心理学的观点来看,解决一个问题而不知道问题的起源是很困难的.在保持数学探究和教学结构严谨性的同时,还要剖析数学的演绎呈现方式,让学生认识到数学的发展过程,而不仅仅是逻辑顺序.发生教学法的基础是数学史,但并不是研究数学史,而是选择相关的历史背景.历史仅仅是提供有利于学生学习的素材,发展学生的直觉,教学的目的不是讲授历史,而是寻找学生学习的最佳方式.人的心理产生于一定的历史文化环境,文化与认知相互依存,不可分割[4].

发生教学法介于严格的历史方法与严格的演绎方法之间,强调借鉴历史引入主题,但需要掌握恰当的教学时机.由于学生学习某个主题往往需要解决问题,因此在教学中,教师要关注"主题的必要性"和"主题的可接受性".应当保护和发展学生对未知事物猎奇的天性,积极引导学生经历知识的发生过程[5].发生教学法的理论基础有历史发生原理、学习动机理论和皮亚杰的发生认知原理等.

2.1　历史发生原理

生物的胚胎发育、个体发育以浓缩的形式重演相应物种的系统发育,称之为"重演律".从"重演律"的角度来看,对生物系统两个历史过程对比的重演律研究,为我们研究其他物质系统和精神系统的发展规律提供了启示.类推于教育,即个体知识的发生过程遵

循人类知识的发生过程，这就是历史发生原理. 人类认识真理的过程，往往要经过无数次的“实践—认识—再实践—再认识”，有时要经过无数次的挫折和失败，甚至经过许多人的努力才能得到比较准确的认识，而每一个体的认识过程也是这样.

教育的任务是使学生的心智通过前人所经历的历程，快速而不遗漏地通过每一阶段. 即有效的学习是要求每位学习者追溯正在学习的主题在历史中演变的主要步骤，有意识地安排一些必要的曲折和弯路，重蹈人类思维发展中的那些关键性步子.

2.2　学习动机理论

学习动机是直接推动学生进行学习的一种动力. 它是一种学习的需要，这种需要是社会和教育对学生学习的客观要求在学生头脑里的反映，它表现为学习的意向、愿望或兴趣等形式. 学习动机是激发个体进行学习活动、维持已引起的学习活动，并使个体的学习活动朝向一定的学习目标的一种内部启动机制. 它与学习活动可以相互激发、相互加强. 学生的学习活动是由各种不同的动力因素组成的整个系统所引起的. 其心理因素包括：学习的需要，学习的必要性的认识及信念，学习兴趣、爱好或习惯等. 从事学习活动，除要有学习的需要外，还要有满足这种需要的学习目标. 学习目标同学生的需要一起，成为学习动机的重要构成因素.

学习动机是影响学生学习活动的重要因素，它不仅影响学习的发生，而且还影响到学习进程和学习结果. 教师既要善于激发学生学习的内部动机，又要恰当激发学生学习的外部动机. 因此教师在教育中，教师要通过情境，引出“主题的必要性”. 激发学生的学习动机，让学生认识到所引入的新主题乃是解决问题的需要.

2.3　皮亚杰的发生认知原理

在认识过程中，同化指主体把客体纳入自己的图式之中，从而引起了图式的量的变化，顺应是指主体的图式不能同化客体，因而导致图式质的变化，去适应客体. 儿童每遇到新事物，总是力图用原有的图式去同化它，如果获得成功，原有的图式便得到巩固和加强，认识达到平衡；如果失败，便做出顺应，建立新的图式去适应现实，直至达到认识上的新的平衡. 这种不断发展着的平衡，就是皮亚杰所说的认识结构的建构过程，从而描述了认识的发生、发展的有序性和阶段性.

儿童认识的建构过程可划分为四大阶段：感知运动阶段、前运算阶段、具体运算阶段和形式运算阶段. 在发展过程中，每一个结构起始于前面阶段的结构，把前面阶段的结构整合为一个新的结构，而这个结构本身又继续向前发展，或迟或早地整合成为下一阶段的结构. 自我调节是生命组织的最基本的特征，正是这种自我调节作用，主动地、不断地协调着有机体和环境之间的关系，从而为认识结构中同化、顺应等机能提供了生物学前提，使认识的发生和不断建构成为可能. 教育工作者的任务就是让孩子的思维经历其祖先之所经历，通过某些阶段而不跳过任何阶段.

3　发生教学法的应用

3.1　发生教学法的策略

运用发生教学法进行教学设计的关键在于教师，对教师的要求是：(1)要全面了解所教主题的历史；(2)要理解该主题历史发展过程中的关键环节；(3)掌握一个环节发展到下一个环节的原因是什么？遇到的困难和障碍是什么？(4)重构历史环节，使其适合于课堂教学；(5)设计出一系列由易到难、环环相扣的问题. 可以是历史上的问题，也可以是改编的问题.

具体实施时，通常从四个角度分析教学内容的发生过程：历史、逻辑、心理学和社会文化. 设计可以分为四个阶段：(1)创设问题情境：思维和认知过程的起源是构造问题情景的最佳方式. (2)自然引出新问题：思考和理解的第一步是产生问题，而且每解决一个问题就会产生新的问题. 因此，在解决了最初的问题之后，还需要不断思考新的、自然出现的问题. (3)分析学生的认知需求：确定学生思维能力的水平，估计过程中可能存在的困难，重要的是寻求激发学生学习动机的方法. (4)重构历史顺序：在现代教学背景下重构关键的思想和问题，使之更适合新知识的教学，强调以发生的历史过程解释概念、理论或关键思想后面的动机. 因此数学课堂教学也是一个复杂的社会文化和认知发展过程[3].

3.2　发生教学法的实践

现在以北师大版七年级数学上册第三章“整式及其加减”第一节“字母表示数”为例，详细介绍发生教学法的具体过程. 通过阅读整节，作为教师要了解四个问题：

3.2.1　全面了解“字母表示数”的历史

19世纪德国数学史家内塞尔曼在《希腊代数》中将代数学的发展分成三个阶段：修辞代数、缩略代数和符号代数.

修辞代数阶段，人们没有使用符号表示数，所有问题的解决都用文字来说明，如古巴比伦泥版BM13901上有七个问题，其中第1题是：“将正方形面积与边长相加，和为$\frac{3}{4}$，求边长.”解法是：置系数1，半之，得$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{2}$自乘，得$\frac{1}{4}$. 将$\frac{1}{4}$与$\frac{3}{4}$相加，得1；此为

1 的平方，从 1 中减去$\frac{1}{2}$，得$\frac{1}{2}$，即为正方形边长.”

在古希腊，毕达哥拉斯学派(公元前六世纪)研究了多边形数，数学家们能轻易说出一个具体的多边形数. 由于不知道字母表示数，他们却无法表达“任一三角形数”. 同样数列的“通项”概念在修辞代数里是根本不存在的，所有数列求和的结果都是针对具体的若干项. 塞流斯时期(约公元前 300 年)泥版 AO6484 上载有 1—10 的平方和，结果是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=(1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3})\times 55$. 古代两河流域、阿拉伯的代数学均属于修辞代数.

公元三世纪，古希腊数学家丢番图在《算术》中首次用字母“ζ”来表示未知数，于是丢番图成为缩略代数最早的作者. 在《算术》第 1 卷中[7]，第 1 题是：“已知两数的和与差，，求这两个数.”丢番图的解法是：假设和为 100，差为 40，较小数为 x，则较大数为 $40+x$，则 $2x+40=100$，故得 $x=30$，而较大数为 70. 这里我们把丢番图的“ζ”改成了 x. 后来，使用不同的字母表示不同的数，但是可以看到字母总是表示未知数. 由于不知道用字母也可以表示任意已知数，丢番图只能用特殊的数来代替题中的已知数.

古代印度数学家使用缩略的梵文音节来表示未知数，没有用缩略音节来表示任意数(包括已知数和未知数). 如印度数学家婆什伽罗(1114—1185)和古希腊数学家一样，不会用字母来表达“任意多项”和一般项，只是取一些特殊的项数，且通项公式与求和公式都是用文字来描述，因此古代印度的代数属于缩略代数.

中国宋元时期的数学家使用“天元”来表示未知数,“二元一次方程”中的“元”指的就是未知数. 在“天元术”中，通过系数的纵向有序排列来表达多项式，在常数项右边标一“太”字，或只在一次项系数的右边标一“元”字，中国宋元时期的“天元术”最多也只能归入缩略代数.

公元十六世纪，法国数学家韦达(1540—1603)实现了历史性的突破，在《分析引论》(1591)中使用字母来表示未知数和已知数. 他说“本书将辅以某种技巧，通过符号来区分未知量和已知量：用 A 或其他元音字母 I、O、V、Y 等来表示所求量，用 B、G、D 或其他辅音字母来表示已知量，始终如一，一目了然.”并将这种新的代数叫“类的算术”，以区别于过去的“数的算术”，“类的算术”就是符号代数. 规定了算术与代数的分界，认为代数运算施行于事物的类或形式，算术运算施行于具体的数. 这就使代数成为研究一般类型的形式和方程的学问. 法国数学家笛卡尔(1596—1650)对韦达的符号系统进行了改进. 从修辞代数到符号代数，代数学经历了三千多年的漫长历程.

3.2.2　“缩略代数”到“符号代数”是关键

“缩略代数”阶段以字母表示未知数为典型特征，丢番图是这一时期的典型代表人物. 随后印度数学家阿里耶波(476—550)等虽朝向“符号代数”有所接近，但只在字母表示数的类型与方程解的一般性上做出了贡献，而不是尝试表达“任意数”. 在丢番图之后一千多年间，欧洲人不仅没有进步，反而倒退回古巴比伦祭司的水平，即修辞代数阶段. 如 13 世纪初，意大利数学家斐波纳契在《计算之书》中，依然没有用字母来表示数. 在该书第 12 章，作者给出二次幂和的求法，他只能与古希腊和阿拉伯数学家一样，取一个特殊的数作为项数. 方程的求解过程也完全是用文字来表达的，将未知数称为“物”. 16 世纪，意大利数学家尽管在三次和四次方程的求解上取得突破，但他们仍未利用字母表示数的便利. 塔塔里亚(1499—1557)为了不让自己遗忘所发现的三次方程求根公式，自编长诗.

中世纪阿拉伯的数学家尽管在数列求和方面取得了卓越的成就，但是他们不会用字母来表示数. 如他们不会表示数列通项和“任意多项”，他们只能通过具体的若干项来说明求和的方法. 虽然“代数学”的名称源于花拉子米(约 780—约 850)的著作，而花拉子米却用“1 平方与 10 根等于 39 单位”这样的语言来描述一元二次方程 $x^2+10x=39$.

“字母表示数”经历了三千多年的历史过程，经过许多数学家的探索和完善. 学生只靠几节课又如何能跨越如此漫长的历史长河? 诚如 M·克莱因对“新数运动”的批判：从古代埃及人和巴比伦人开始直到韦达和笛卡儿以前，没有一个数学家能意识到字母可用来代表一类数[8]. 因此，这样的过渡仍然需要经历缓慢的过程而非一蹴而就. 只有随着逐步的学习，学生才能逐渐理解和接受符号代数.

3.2.3　学生学习的障碍和困惑

在长期的算术学习中，学生形成的认知与代数学习有较大的差别,“字母表示数”意义的多样性与不确定性是造成学生学习代数的主要障碍. 字母意义的演变过程为：记数符号—未知数—任意数. 随着人们对字母意义认识水平的提高，字母表示数的功能逐步得到发展与完善，这是一个漫长的过程. 因此学生在学习“字母表示数”的时候会遇到许多困难，主要表现为：不同字母可以取同一个值；同一个字母在不同时刻可以取不同的值；同一字母在不同问题中可以取不同的值；在同一题中不同的数要用不同字母表示；字母不一定表示对象，也可以表示单位(如 m 可以表示米)等.

3.2.4 根据历史,重构课堂

每位孩子的认知发展可能各有特点,但总体上应该遵循人类认识的一般规律.按照人们对“字母表示数”的认知发展过程,孩子对“字母表示数”的认知应该分为以下几个阶段:第一阶段,字母不仅可以表示未知数,还可以表示已知数;第二阶段,字母不仅可以表示特定的意义,还可以表示变化的数;第三阶段,不仅可以在缩略水平上运用字母,还可以在符号水平上运用字母;第四阶段,学生设计符号、运用符号,自觉地用字母表示数来进行计算、分析、推理和论证.没有这四点认识的逐步递进,即使反复强调“字母表示数”是由具体到抽象的飞跃,学生还是不可能在心理上表征“字母表示数”的真正意义.“字母表示数”的新意义要进入学生已有的认知结构,字母运用的原有经验是必经的节点.学生的认识要实现飞跃,就必须对“字母表示数”的新意义和旧经验之间的区别有清楚的认识.鉴于此,教学的整体设计何去何从,似乎不难选择,在课堂上再现人类认识的三千多年历史也就顺理成章了.

参考文献

[1] 赫克尔著,马君武译.宇宙之谜[M].北京:中华书局出版,1958.
[2] 赫·斯宾塞著,胡毅,王承绪译.斯宾塞教育论著选[M].北京:人民教育出版社,2005.
[3] 第斯多惠著,袁一安译.德国教师培养指南[M].北京:人民教育出版社,2001.
[4] 张维忠.数学教育中的数学文化[M].上海:上海教育出版社,2011.
[5] 涂荣豹,宁连华.中学数学经典教学方[M].福州:福建教育出版社,2011.
[6] 黄金荣,李业平.数学课堂教学研究[M].上海:上海教育出版社,2010.
[7] Fauevl, J. &Gray, J. The History Of Mathematics: A Reader[M]. Hampshire:Ma cmillan Education, 1987.
[8] Kline, M. Logic versus pedagogy[J]. American Mathematical Monthly, 1970, 77(3).

作者简介 张俊忠,男,1971 年生,湖北应城人,华中师范大学教育学院博士研究生,华中师大一附中初中部中学高级教师,主要从事中学数学教育教学研究;綦春霞,女,1966 年生,山东东营人,北京师范大学教育学部教授,博士生导师.

基于 APOS 理论的初中生函数概念认知调查*

深圳市龙岗区平冈中学 518116 袁柳芳 蒋 科

1 APOS 理论简述

APOS 理论是美国的杜宾斯基等人在数学教育研究实践中发展的一种理论,是针对于数学概念学习过程研究的一种建构主义的学习理论,[1] 杜宾斯基认为,学生学习数学概念要进行心理建构,这一建构要经历 4 个阶段:操作阶段(Action)、过程阶段(Process)、对象阶段(Object)和图式阶段(Scheme),取这四个阶段英文单词的首字母,定名为 APOS 理论[2].这种理论不仅指出学生的学习过程是建构,而且表明了建构的层次.

操作阶段(Action)是学生理解概念的一个必要条件,通过操作让学生亲自体验,感受直观背景和概念间的联系.例如,在有现实背景的问题中建立函数关系:$y = x^2$,需要用具体的数字构造对应:$2 \to 4$;$3 \to 9$;$4 \to 16$;$5 \to 25$;…… 通过操作,理解函数的意义.

过程阶段(Process)是学生对操作进行思考,经历思维的内化,概括过程,学生在头脑中对活动进行操作和反思,抽象出概念所特有的性质.一般地,有 $x \to x^2$;其它各种函数也可以概括为一般的对应过程:$x \to f(x)$.

对象阶段(Object)是通过前面的抽象认识到了概念的本质,对其进行压缩并赋予形式化的定义及符号,使其达到精致化,成为一个思维中具体的对象,在以后的学习中以此为对象去进行新的活动.比如函数的加减乘除、复合运算等,在表示式 $f(x) \pm g(x)$ 中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均作为整体对象出现.

图式阶段(Scheme)的形成是要经过长期的学习活动进一步完善,起初的图式包含反映概念的特例、抽象过程、定义及符号,经过学习,建立起与其他

* 基金项目:龙岗区教育均衡化、优质化、现代化发展行动研究科研项目资助课题.