

高中数学课程内容及其分布的国际比较

——基于12个国家高中数学课程标准的研究

曹一鸣

严虹

(北京师范大学数学学院 100875) (贵州师范大学师范大学 550001)

1 问题的提出

我国高中数学课程标准的修订工作已经启动,如何修订,需要立足本土,拓展视野,从多个角度,开展进行深入研究.

目前已有不少学者对数学课程标准进行深入研究,有以2—3个国家之间进行的一些知识主题之间进行比较的^[1],也有针对某一主题,对多个国家开展深入研究的^[2].本文则以包括中国在内的12个国家高中数学课程标准文本文件为依据,从知识领域、知识单元、知识主题三个层面,来分析这些国家高中数学课程包括哪些内容及其分部情况,试图搞清这一最基本的、也是课程设置中最核心的问题,期盼能对我国的高中数学课程标准修订、以及数学教学改革的实施提供一定借鉴和参考.

2 研究设计

2.1 研究国家的选取

亚洲:中国大陆、新加坡、韩国;欧洲:芬兰、德国、法国、英国、俄罗斯;美洲:加拿大、美国;大洋洲:澳大利亚;非洲:南非.

从地理位置上看,12个国家遍及五大洲,包含发达国家与发展中国家,经济状况、文化背景、教育水平不尽相同,可以较好地反映当今国际上主流国家高中数学课程内容分布的特点.

从国际教育比较项目上看,包含了在国际学生评估项目(Program for International Student Assessment,简称PISA)“数学素养”中连续三次(2012,2009,2006)^[3]均显著高于OECD平均水平的国家(地区):中国(上海)(参加了2012,2009年测试),新加坡,韩国,芬兰,加拿大,澳大利亚,德国(在2006年测试中与OECD平均不显著);作为连续三次均与OECD平均水平不显著的国

家,选择了颇具代表性的欧洲国家法国、英国;作为连续三次均低于OECD平均水平的国家,选择了俄罗斯、美国,而这两个国家则是国际上数学、科学等很多方面都是非常强势的国家;另外,还选择了没有参加过PISA测试的非洲代表国家——南非.对这些国家高中数学课程标准的研究也能同时一窥国际数学教育发展的不同水平和方向.

2.2 高中数学课程标准版本的选取

中国:2003年教育部制订《普通高中数学课程标准(实验)》(必修,选修系列2)^[4].

新加坡:2011年教育部公布的《数学教学大纲—H2水平》^[5].

韩国:2011年教育科学技术部发布的《数学教育课程》(高中部分)^[6].

芬兰:2003年国家教育委员会发布的《普通高中国家核心课程》(高级大纲)^[7].

加拿大:2009年魁北克省课程标准(科学选项)^[8].

澳大利亚:2013年公布的《高中数学课程标准》(专业数学课程)^[9].

德国:2010年黑森州数学课程大纲(完全中学高级阶段·提高课程)^[8].

法国:2011年教育部公布的《高中数学大纲》(理科大纲)^[8].

英国:1999年教育部颁布的《英格兰国家数学课程》(关键阶段4·高级课程)^[8].

俄罗斯:2004年教育部颁布《中学教育标准·数学部分》10~11(或12)年级(侧重数学发展方向水平)^[8].

美国:2010年发布的《统一核心州数学标准》(高中部分)^[8].

南非:2012年颁布的《课程与评价标准》(高

中部分)^[10].

为了表述简便,下文提及上述文本时均使用“某国标准”.

本文中除南非之外的11个国家以连续三次参加PISA数学素养测试的平均排名顺序排序;以类似我国“理科”层次要求进行课程标准版本选取;关于各国高中阶段的划分以及课程内容主要依据曹一鸣,代钦,王光明主编的《十三国数学课程标准评介(高中卷)》^[8]一书,并进一步参考相关课程标准原文.

2.3 研究思路与方法

本文以12个国家颁布的高中数学课程标准文本作为研究对象,主要针对其中的“内容标准”部分进行比较研究.基于内容标准中每个整句(即内容条目)为基本单位,依次划分为知识领域、知识单元、知识主题(如表1所示),本研究中做出如下界定,“知识领域”是基于高中数学课程研究内容进行的一级划分,“知识单元”是在知识领域的基础上,结合各国实际情况进行的二级划分;“知识主题”是在知识单元的基础上,主要以包含若干内容条目的最小内容主题为依据进行的三级划分.在三个层次中针对内容条目数量进行统计,进而分析不同国家高中数学课程内容分布的异同.

表1 三个层次知识划分的基本情况

知识领域					合计
数与代数	图形与几何	统计与概率	微积分	其他	5
知识单元(个数)					
7	4	3	3	15	32
知识主题(个数)					
34	23	21	15	15	108

说明:“其他”领域的15个知识单元,由于各国之间情况差异较大,不再进行知识主题的划分.

本文主要以定量研究的方法对12国高中数学课程标准进行文本分析,基于“内容标准”内容条目逐条进行编码,分别从知识领域、知识单元、知识主题三个不同层次逐层统计出各国相应的内容条目数量以及比重,通过统计数据对课程内容分布的比较研究,从而进一步分析在国际视野下我国课程内容分布的基本情况.

3 高中数学课程内容分布的比较与分析

3.1 基于知识领域内容分布的比较与分析

综合12国课程的内容领域,参考数学科学的具体分支,为了课程内容及分布情况更具可比性,以课程标准中内容条目为基本单位,将高中数学课程内容统一按照5个知识领域进行划分,并计算各个知识领域中所占的相应比重,如表2所示.

表2 12国高中数学课程知识领域内容分布统计表

国家	数与代数		图形与几何		统计与概率		微积分		其他		小计
	数量	百分比	数量	百分比	数量	百分比	数量	百分比	数量	百分比	
中国*	48	30%	26	16%	26	16%	11	7%	48	30%	159
新加坡*	44	35%	5	4%	35	28%	22	17%	21	17%	127
韩国	62	27%	29	12%	14	6%	70	30%	58	25%	233
芬兰*	18	31%	7	12%	4	7%	14	24%	16	27%	59
加拿大*	16	48%	9	27%	7	21%	0	0%	1	3%	33
澳大利亚*	46	32%	10	7%	8	6%	14	10%	66	46%	144
德国	14	15%	7	8%	19	21%	31	34%	20	22%	91
法国	36	29%	13	10%	29	23%	27	21%	21	17%	126
英国	58	46%	23	18%	31	25%	0	0%	14	11%	126
俄罗斯*	28	39%	27	38%	5	7%	6	8%	5	7%	71
美国*	79	49%	40	25%	30	19%	0	0%	13	8%	162
南非	58	59%	16	16%	15	15%	8	8%	2	2%	99
均值	42	35%	18	15%	19	16%	17	14%	24	20%	120

说明:由于四舍五入的原因,全文中标注“*”的国家累计百分比不是100%;综合各国具体情况,将以下内容纳入“其他”知识领域主要有以下几种:为了学习和研究其他数学内容所需要掌握的工具类数学知识:向量、组合数学、集合、算法初步、常用逻辑用语、推理与证明;高等数学类知识:微分方程、矩阵、图论、数论、数值代数、线性代数、幂级数、仿射投影;综合类数学知识:数学建模.共15个知识单元.

从中可以看出：

第一，从内容条目数量上看，我国仅在“微积分”领域少于12个国家的平均水平；其他四个领域均高于平均水平。其中，“其他”的内容条目是平均水平的2倍。

第二，从内容条目比重上看，就12国平均水平而言，我国在内容条目比重中，“图形与几何”、“统计与概率”与平均水平相当，在“数与代数”、“微积分”略低于平均水平，在“其他”比平均水平高出较多。

另外，

在“数与代数”中，南非比重最大，高出平均水平24%，也是12国中唯一超过50%的国家，其次是美国、加拿大，均接近50%；德国最小，是唯一低于20%的国家。

在“图形与几何”中，俄罗斯比重最大，高出平均水平23%，也是12国中唯一超过30%的国家，其次是加拿大、美国，均接近30%；新加坡最小。

在“统计与概率”中，新加坡比重最大，高出平均水平12%，其次是英国、法国；澳大利亚、韩国最小。

在“微积分”中，德国比重最大，高出平均水平20%，其次是韩国、芬兰；值得一提的是，从加拿大、英国、美国三国的标准文本中，并没有发现微积分的内容条目。事实上，我们知道，这些国家的微积分是作为大学选修课程单独开设的。

在“其他”中，澳大利亚比重最大，高出平均水平26%，也是12国中唯一超过40%的国家，其次是中国、芬兰；南非最小。

3.2 基于知识单元内容分布的比较与分析

为了进一步分析12国课程内容分布的基本情况，综合考虑各国标准中知识领域下属的单元，将5个知识领域细化为32个知识单元(如表3所示)。

表3 知识领域之下知识单元的具体内容

知识领域	知识单元
数与代数	函数；数与数系；方程；代数式；不等式；数列；其他
图形与几何	立体几何；解析几何；平面几何；其他
统计与概率	统计；概率；其他

续表

知识领域	知识单元
微积分	微分学；积分学；其他
其他	向量；组合数学；推理与证明；矩阵；微分方程；常用逻辑用语；数值代数；集合；线性代数；图论；算法初步；数论；幂级数；仿射投影；数学建模

说明：“数与代数”领域中“其他”单元主要包含三角恒等变换、解三角形、解决问题等内容；“图形与几何”领域中“其他”单元主要包含解决问题、交流、二维和三维关系等内容；“统计与概率”领域中“其他”单元主要包含解决问题、交流等内容；“微积分”领域中“其他”单元主要包含微积分基本定理、综合运用微分和积分、数学文化等内容。其中各个领域知识单元按照同时包含这个单元的国家数量降序排列。

一方面，在以上知识单元中，覆盖面最广的国家是韩国，具有21个知识单元，比重达到66%；其次是我国，具有19个知识单元，比重达到59%；覆盖面最窄的国家是加拿大，具有11个知识单元，比重仅为34%，具体情况如图1所示。一定程度上说明我国课程内容的覆盖面在国际上是比较广的。

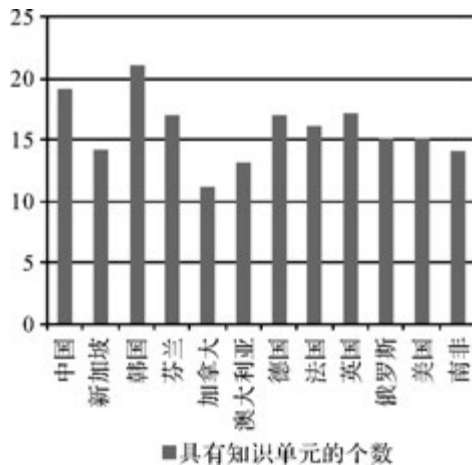


图1 12国具有知识单元个数的统计

另一方面，就我国课程而言，在“数与代数”中，数与数系、方程、代数式所占比重均低于12国平均，其中“数与数系”与平均水平差距最大(18%)；“函数”则高于平均水平19%。在“图形与几何”中，没有平面几何、其他的内容条目，“解析几何”高于平均水平34%；在“统计与概率”中，没

有“其他”的内容条目,“概率”低于平均水平 9%,“统计”高于平均水平 15%;在“微积分”中,“积分学”低于平均水平 20%，“其他”高于平均水平 12%;在“其他”领域中,向量、证明与推理、常用逻辑用语、集合、算法初步内容条目数量明显高于平均水平(具体情况如表 4~7、图 2 所示).

进一步分析,数与数系、方程、代数式、平面几何等知识单元的主要内容在初中阶段已经学习过;而概率、积分学的内容比重相对较低.

表 4 “数与代数”领域知识单元比重统计

	函数	数与数系	方程	代数式	不等式	数列	其他
我国*	52%	8%	0%	2%	17%	10%	10%
12国平均*	33%	26%	12%	9%	5%	7%	9%

表 5 “图形与几何”领域知识单元比重统计

	立体几何	解析几何	平面几何	其他
我国	31%	69%	0%	0%
12国平均	24%	35%	35%	6%

表 6 “统计与概率”领域知识单元比重统计

	统计	概率	其他
我国	62%	38%	0%
12国平均*	47%	47%	5%

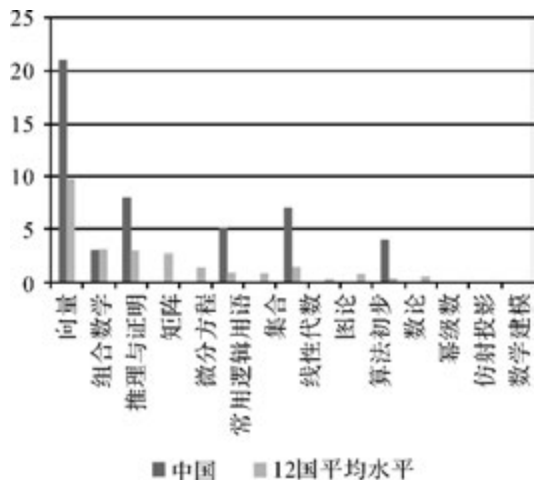


图 2 其他领域知识单元内容条目数量统计

表 7 “微积分”领域知识单元比重统计

	微分学	积分学	其他
我国	73%	9%	18%
12国平均	65%	29%	6%

3.3 基于知识主题内容分布的比较与分析

为了深入分析 12 国课程内容分布的具体情况,将 32 个知识单元细化为 108 个知识主题.

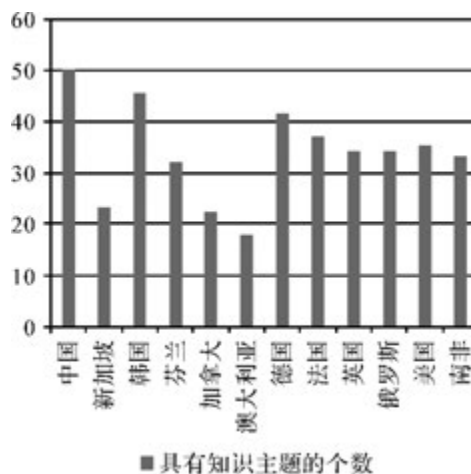


图 3 12 国具有知识单元个数的统计

一方面,在知识主题中,我国是覆盖面最广的国家,具有 50 个知识主题,比重达到 46%;其次是韩国,具有 45 个知识主题,比重达到 42%;覆盖面最窄的国家是澳大利亚,具有 18 个知识主题,比重仅为 17%,具体情况如图 3 所示.再次说明我国课程内容的覆盖面在国际上是比较广的.

另一方面,对于知识主题在国家间的基本分布情况进行统计(如表 8 所示):

首先选取知识主题中前 20%的主题(即 7 个及以上国家均有的主题)作为研究对象,一定程度上可以视为 12 国比较关注的知识内容,与我国标准中的主题进行比较研究.

表8 知识主题的国家分布情况统计

国家数量	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
主题数量	1	1	1	6	3	8	12	9	8	5	20	34
主题所占比重	1%	1%	1%	6%	3%	7%	11%	8%	7%	5%	19%	31%
累计比重	1%	2%	3%	9%	12%	19%	30%	38%	45%	50%	69%	100%

表9 7个及以上国家均出现的知识主题

共有某个知识主题的国家数量	知识主题
12	函数及其图象
11	向量
10	三角函数
9	复数;代数式;指数函数;不等式(组);概率的计算公式;组合数学
8	一次方程(组);导数在研究函数中的应用;导数概念及其几何意义
7	数的运算;二次方程(组);等差数列与等比数列;对数函数;三角形的性质及证明;空间几何体;用样本估计总体;概率的统计定义

对于以上20个知识主题,我国内容中没有的是:数的运算,一次方程(组),二次方程(组),三角形的性质及其证明共4个主题.但是,进一步分析发现,它们已经出现在初中数学课程当中.因此,对于12国比较关注的知识主题,我国标准覆盖得比较全面.

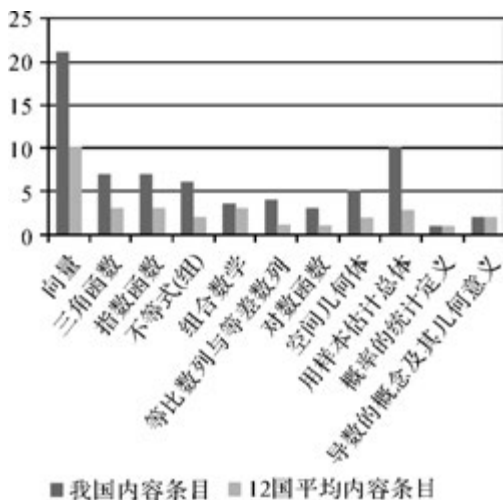


图4 我国条目数量高于(等于)平均水平统计

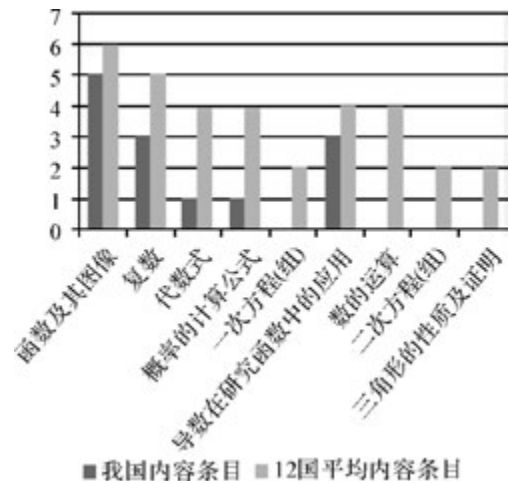


图5 我国条目数量低于平均水平统计

同时,我国内容条目数量低于12国平均水平的还有:函数及其图象,复数,代数式,概率的计算公式,导数在研究函数中的应用一共5个主题.其中,“函数及其图象”“代数式”主要内容在初中已经学过.

其余内容与平均水平存在一定差距.以“复数”为例,我国课程主要集中在复数的基本概念,复数的代数表示法以及几何意义,复数代数形式的四则运算;而12国中还有复数的笛卡尔表示、极坐标表示、复平面以及复数的应用等内容.

其次,选取知识主题中的后20%(即只有1个国家独有的主题)作为研究对象,与我国标准中的主题进行比较研究.

表10

	数与代数	图形与几何	统计与概率	微积分	其他
1个国家独有的主题	8	7	8	5	6
我国独有的主题	实习作业	/	聚类分析 几何概型 数学文化	数学文化	算法初步

从上表中可以发现:12国中我国独有知识主题共有6个.其中,“实习作业”条目:根据某个主

题,收集17世纪前后发生的一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物的有关资料或现实生活中的函数实例,采取小组合作的方式写一篇有关函数概念的形成、发展或应用的文章,在班级中进行交流.具体要求参见数学文化的要求^[4].

“数学文化”条目:通过阅读材料,了解人类认识随机现象的过程.收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料,并进行交流;体会微积分的建立在人类发展中的意义和价值.具体要求见本标准中“数学文化”的要求^[4].

由此可知,“数学文化”作为我国课程的特征之一贯穿在整个高中数学课程内容之中.

另外,以“算法初步”为例,只有我国将其作为独立的一个知识单元组织课程内容.其他国家有一些零星的算法知识分散在课程内容中,比如澳大利亚在“矩阵”中提出了“矩阵算法”的内容条目;芬兰在“数值代数方法”中提出了“学习算法的思想”;法国课程中有一些专门设计算法的活动,比如:用绘图工具能很快得到由代数式定义的函数的图像,有趣的是,对分段函数,学生需要编写算法进行画图;几何坐标系是为了把几何性质转换成数值,并为实施简单的算法来求解问题提供了可能等等.

4 结论与启示

高中数学课程内容的选择一直是数学课程标准研制中的最基本问题.他山之石,可以攻玉.通过12国高中数学课程比较研究,可以基于国际视野进一步了解我国课程内容分布的基本情况,从而为我国高中数学课程课程标准的研制、高中数学课程改革的实施提供一定的借鉴和参考:

(1)从整体上看,我国高中数学课程覆盖面比较广

在108个知识主题中,我国课程占总体知识主题的46%,居12国之首,尤其是在“数与代数”“统计与概率”领域.同时,对于我国高中数学课程没有覆盖的,其他国家比较关注的主题,基本出现在我国初中数学课程中,一定程度上也说明了我国初中数学课程要求的程度比深.

(2)从知识领域内容分布上看,我国课程整体上分布比较合理.其中“图形与几何”“统计与概率”内容条目比重与12国平均水平几乎一致;其

余领域相差也并不是很大.相比较而言,“其他”领域内容偏多,比重超过平均水平10%.

因此,应当适当精简“其他”领域内容,可以考虑适当增加“微积分”领域内容,特别是积分内容.

(3)从知识单元内容分布上看,我国课程较为重视“函数”“解析几何”“统计”等内容,也重视“算法初步”“集合”“基本逻辑用语”“向量”、“推理与证明”等工具性数学知识的内容.

(4)从知识主题内容分布上看,我国课程重视“数学文化”的渗透及工具性知识的学习.在“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“微积分”领域均有涉及数学文化的内容条目,这也成为我国课程的特征之一.另外,算法初步,集合,常用逻辑用语等内容均为数学工具性知识,从一个侧面说明我国比较注重工具性数学知识的学习.

(5)我国在“复数”“导数在函数中的应用”等主题内容比较单薄,可以适当增加相应内容以便更好地与大学数学内容衔接.

(6)在我国所独有的知识主题中,以“算法初步”为例,其他国家如澳大利亚、芬兰、法国主要是依托具体内容呈现,这一现象也值得我们思考,是否有必要单独设置这些主题.

参考文献

- 1 严家丽. 英美澳高中数学课程标准的启示:注重学生的 ICTM 素养[J]. 数学教育学报, 2014, 12: 50-53
- 2 宋丹丹,曹一鸣. 高中数学课程标准中函数内的国际比较研究[J]. 数学通报, 2014, 12: 1-7, 16
- 3 Organization for Economic Co-operation and Development. Programme for International Student Assessment [DB/OL]. 2012[2014-04-01]. <http://www.oecd.org/pisa/>
- 4 中华人民共和国教育部制订. 普通高中数学课程标准(实验)[S]. 北京:人民教育出版社, 2003
- 5 宁连华,崔黎华,金海月. 新加坡高中数学课程标准评介[J]. 数学教育学报, 2013, 8: 1-5
- 6 金康彪,贾宇翔. 韩国高中数学课程标准评介[J]. 数学教育学报, 2013, 10: 42-46
- 7 康玥媛, Fritjof. 芬兰高中课程改革及高中数学课程标准评介[J]. 数学教育学报, 2013, 8: 11-15
- 8 曹一鸣,代钦,王光明. 十三国数学课程标准评介(高中卷)[M]. 北京:北京师范大学出版社, 2013
- 9 董连春, Max Stephens. 澳大利亚全国统一高中数学课程标准评述[J]. 数学教育学报, 2013, 8: 16-20
- 10 李娜,曹一鸣, Lyn Webb. 南非国家高中数学课程与评价标准评介[J]. 数学教育学报, 2013, 8: 6-10