

八年级学生几何探索水平的区域质量监测

王 祎 慕春霞

【摘要】过程性目标关注的数学探索活动可以帮助学生归纳总结、发现结论,从而发展他们的创新精神。为了监测学生在几何与图形学习上的发展情况,数学素养测试项目组设计了体现“探索”目标的问题——“探索并掌握多边形内外角和”,对三个地区639所中学的83792名八年级学生进行测试,描述学生的整体作答情况,并从地区差异、教科书版本、教师以及学生等维度进行分析,希冀为数学探索性教学以及评价提供一定的建议。为了突显数学教学的探索性,我们应该重视学生数学思维的训练和开发性作答,给予学生充分的探索空间,鼓励他们多样化地解决问题,融合不同版本的教科书,选择学生适合的学习方式。

【关键词】八年级;几何;探索题;多边形内外角和;测试

【中图分类号】G40-058.1 【文献标识码】A 【DOI编码】10.16518/j.cnki.emae.2015.07.008

一、问题提出及研究设计

《义务教育数学课程标准(2011年版)》(下文简称“课程标准”)将数学课程目标分为结果性目标和过程性目标两个方面,其中,结果目标用“了解”“理解”“掌握”“运用”等行为动词表述,过程目标用“经历”“体验”“探索”等行为动词表述。^[1]“课程标准”在有关行为动词的分类中,对“探索”一词是这样定义的:独立或与他人合作参与特定的数学活动,理解或提出问题,寻求解决问题的思路,发现对象的特征及其与相关对象的区别和联系,获得一定的理性认识。^[2]由此可见,“探索”一词强调问题解决的过程性,且要求学生获得相关对象的理性认识。

作为合情推理的重要环节,探索活动在初中阶段可以帮助学生归纳总结、发现结论,从而发展他们的创新精神。探索活动的结论需要通过演绎推理进行证明,这个证明过程有利于学生逻辑思维能力的培养;此外,适当地引导学生对同一数学问题提出不同的探索、证明方法,巧妙灵活地解决数学问题,还可以激发学生对数学证明的兴趣。^[3]因此,学生的推理能力一般是以探索活动

为起点逐步发展的。在图形与几何内容的教学安排上,“课程标准”注重探索活动与证明的有机结合,意图帮助学生建立起良好的数学思维体系。^[4]

研究者设计了一道体现“探索”目标的问题——“多边形内外角和”。根据“课程标准”的要求,初中生在对该问题解决上要达成的目标是“探索并掌握多边形内角和与外角和公式”。本项目测试卷分为A卷和B卷,以方便不同地区使用。另外,在A卷和B卷的基础上,研究者还设计了S卷。每一套试卷中都有一道探索题。被试对象来自西南、中部、东南三个地区(M市、Z市和J省)的83792名八年级学生,各地区试题使用情况见表1。

表1 各地区试题使用情况

地区	使用试卷	探索题题号	回收有效试卷数量
J省	A	19	27750
	B		
M市	S	20	15746
Z市	S	20	40296

三份试卷的探索题目如下:

A卷:请写出“n边形内角和公式是 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ”的探索过程,不必给出严格证明。

本文数据来自北京师范大学中国教育质量监测协同创新中心“区域质量健康体检项目”的子项目“中学数学学业质量诊断与反馈”(项目编号:105006)。感谢大项目组在数据处理方面的支持。

王 祎/University of Southampton UK(英国南安普顿大学)数学教育博士生。

慕春霞/北京师范大学教育学部教授,博士生导师,主要研究方向为数学教育。

B卷:请写出“多边形外角和是 360° ”的探索过程,不必给出严格证明。

S卷(S卷探索题与A卷探索题相同):请写出“ n 边形内角和公式是 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ”的探索过程,不必给出严格证明。

由于S卷与A卷的探索题一致,故在后文的描述分析中S卷探索题与A卷探索题统一称为A卷探索题。

研究者根据学生的作答情况进行分类和编码,将学生作答归纳出四种探索方法,每一种作答方法都有四个得分梯度:0分、2分、4分和6分,具体见表2。

表2 几何探索题解答方法分类

作答方法 试卷	方法一	方法二	方法三	方法四
A卷	分割归纳或者数字归纳	利用外角和公式	测量归纳	函数与方程
B卷	列举归纳(包括公式推导和赋值列举)	平移、旋转、拼接或者与之类似的表述	利用内角和公式	测量归纳

对学生的编码如下:0代表空答,即没有任何作答痕迹;90代表误答,即回答错误;其他编码由小于90的两位数组成,第一位数代表得分,第二位数为解答方法的编号。例如,如果学生的作答编码为64,说明该生探索题得了满分(6分),使用的是方法四。

二、测试结果

1.“探索多边形内角和”题的得分

三个地区中有近七成学生能在A卷(S卷)的几何探索题上得分,且有30%的学生得满分,

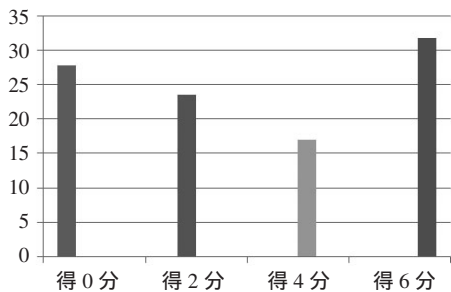


图1 “探索多边形内角和”题的得分情况

说明大部分学生能够对“多边形内角和公式”进行尝试性探索,并有一部分学生对探索过程有比较恰当完整的表达。三个地区横向比较表现突出的是M市,其满分率最高且0分学生比例最低;而表现较差的是Z市。需要说明的是,M市测试程度表现较好的原因在于,被试主要是改革试验区的学生,而Z市则是全测。

2.“探索多边形外角和”题的得分

单独在J省测试B卷的题目为“探索多边形外角和”,60%的学生在这道题上的得分,比“探索多边形内角和”的得分低了十个百分点,另外,这道题得满分人数比例也相对较低,只有17.4%,与A卷的平均水平相比低了近一半。

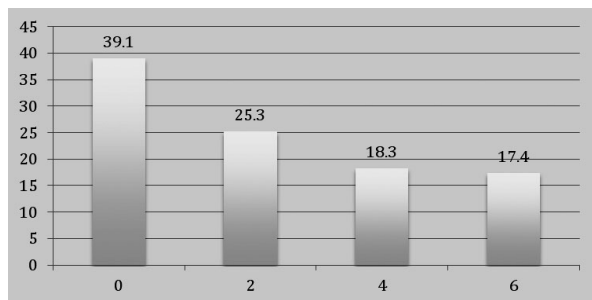


图2 “探索多边形外角和”题的得分情况

从题目本身来看,两道探索题均来自同一知识点——多边形的性质,但学生在两道题上的得分表现存在明显差异,探索多边形外角和的表现明显低于探索多边形内角和的表现,而且两个问题得满分的比例都不高。

3.受测地区学生的作答方法

学生在作答“探索多边形内角和”中所使用最多的是方法一——分割归纳,约占67.4%,说明大部分学生可以认识简单图形,并发现其中的规律,从而归纳总结出最终结论。

排在第二位的方法是——利用外角和公式直接计算。约有3.7%的学生使用这种方法,说明学生能够建立知识之间的联系。约有1.1%的学生使用了方法三和方法四“测量以及函数的方法”得到结论,可见使用这些方法的人数极少。此外,约有28%的学生作答方法是错误的。

学生在解决“探索多边形外角和”问题时使用最多的方法是列举归纳,约占40%。与内角和

八年级学生几何探索水平的区域质量监测

公式探索方式类似,学生更趋向于使用直观、具体的方法来探索规律。

与“探索多边形内角和”作答方法集中的趋势不同,在J省测试的“探索多边形外角和”题中,学生作答方法较为分散。排在第二位的是方法三“利用内角和公式”,约占19.57%。使用方法二“平移”约占1.6%,只有0.9%的学生使用了测量的方法。但是,有意思的现象是,在方法多样化的同时,约有38%的学生作答方法是错误的,说明学生在尝试用不同方法探索的同时承担着很大的误答风险。

4. 不同水平的学生作答情况

几何探索题与学生学业水平存在着相关性。在探索方法上,处于不同水平的学生有不同的表现与考虑。对于“探索多边形内角和”所使用的方法四——函数与方程,只有一小部分高水平学生才会想出来。

此外,大部分高水平学生的作答都集中在常规方法上。比如,A卷的方法一、方法二,B卷的方法一、方法三,说明高水平学生对于列举例子、探索规律、归纳总结的过程很熟悉,并且掌握了多边形内外角和的关系,能够从容转化。

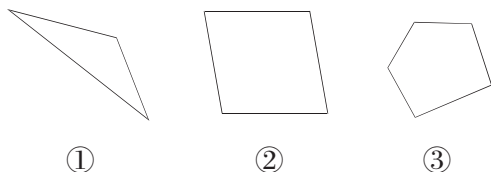
然而,在B卷中,学生表现情况有所改变。各个水平学生在方法二上都有得分,高水平学生不再具有绝对优势。B卷方法二——平移、旋转或拼接等相关描述是一种可以与生活常识联系起来的方法,对学生数学整体学科能力水平的要求较弱,所以处于各水平等级的学生差异也不大。在该题中还出现了一些很有想像力的语言描述,如“让蚂蚁沿着任意一个多边形的外侧爬行,每一拐弯就是一个外角的度数,而蚂蚁最终会回到起点,一共旋转了360度”。另外,B卷出现了使用“多次测量多个图形”得满分的学生,打破了A卷中该方法无满分的记录,见下案例。

1. 可以列举多种不同类型的多边形。

2. 可以先用精准的量角器先量出每个多边形的外角和。

3. 对于综上数据进行分析。

例:



图形	三角形①	四边形②	五边形③	……
外角和	360°	360°	360°	……

结论:多边形外角和始终等于360°。

值得一提的是,案例中,学生在探索外角和公式时与内角和公式的要求不同,他们没有完全按照教材的呈现形式,表现为较为灵活,且一部分学生表现出了科学探索的严谨性。

三、影响八年级学生几何探索题表现的因素

影响学生探索题得分的因素很多,基于已有的研究,本文选择了学生自身、地区教材版本以及教师教学三方面的影响因素进行分析。^[5]

1. 探索题与内容的关联。

由学生的作答情况可知,有些方法需要学生联系不同的知识,并学会知识之间的转化和应用。几何题的解答不仅需要几何方面的知识,学生如果能对数学不同领域的内容有比较全面的认识,自然在开放性的题目中更有优势,其探索过程也会体现出方法的多样性与灵活性。为了验证这一观点,研究者以学生在试卷中数与代数、空间与几何、统计与概率三部分的得分为自变量,以几何探索题的得分为因变量,拟合线性方程观察内容维度的三部分对学生在探索题表现的贡献。

从A卷拟合结果来看,数与代数、空间与几何和统计与概率三部分对于学生在探索题上的表现有显著($\text{sig} < 0.01$)的正向影响,且回归系数为:0.557(数与代数) $>$ 0.165(空间与几何) $>$ 0.139(统计与概率),说明对探索题表现贡献最大的是数与代数部分,即学生在擅长数与代数内容的情况下更有可能在这道几何探索题上有比较好的表现。究其原因,试题虽然考查的几何内容,但是解题过程与代数中的“探索规律”有相似之处,因此,学生可以经由已有的知识进行探索归纳得出

八年级学生几何探索水平的区域质量监测

表3 各版本教材对几何探索题相关内容的呈现方式汇总

地区	教材版本	探索题教学安排	学生的知识储备	探索方法及呈现	特点	学生表现
M市	人教版	七年级下	A(B-)C	分割/填空	语言描述、鼓励多解	得分率高、方法集中
J省	浙教版	八年级下	ABCDE X	内角和、分割/表格	简洁、程式化、无多解	得分率高、方法集中
				外角和、利用内角和	顺带一提的内容	得分率低、方法分散
Z市	北师大旧版	八年级上	A(B+)C(D+)E	分割/提示	联系生活、提示较少、开放多解	得分率低、方法分散

表4 学生知识储备编码

A	图形的初步认识	B	B- 三角形的初步认识
			B (B-)+特殊三角形+勾股定理
			B+ B+全等三角形
C	相交线与平行线	D	D :平行四边形
E	图形和变换		D+ D+特殊四边形及相关性质
X	命题与证明		

结论——其本质是寻找规律。由此可见,学生在数与代数部分内容的积累与掌握对几何探索题得分的贡献是比较大的。

B卷拟合结果与A卷相似,数与代数对探索题表现有比较大的正向影响,回归系数 0.458 (数与代数) >0.225 (空间与几何) >0.059 (统计与概率)。但数与代数和空间与几何两部分内容对学生探索题表现影响的差距与A卷相比明显缩小。

2.不同版本教材的影响

三个地区因地域差异分别使用不同版本的教材,每个版本的教材对几何探索内容的处理方式是不同的,其一定程度上容易影响学生的表现。表3为各版本教材对几何探索题相关内容的呈现方式及学生的表现。

人教版教材比较直接,而且给出探究过程的示例,学生的整体得分比较高,同时表现出方法比较集中的情况;浙教版教材也展示了探索的过程,而且在知识的储备上最为充分的,这些准备与学生的成绩紧密相关。北师大版教材关注的是生活情境的引入,在学生的探索方法方面没有给予过多方法的提示,学生得分不甚理想,但教学方法还是呈现了多样性。

教材是学生学习的重要资源之一,其导向也会影响学生的学习。不同的呈现方式和知识安排的顺序能力学生在解决开放、探索性问题时提供较大的空间。

3.教学的地区差异

本项目除了学生测试,还进行了学生的问卷调查,其中有一部分内容涉及到教师的教学方式和方法,如“在课堂上,教师是否鼓励我们采用不同的学习方式”“教师是否采用多种方式帮助我们理解数学知识”“教师是否给我们提供了充分的思考和探索空间”等。学生问卷中有对教师教学情况的评价得分,通过方差分析比较,我们可以看到教师教学评价好的学生与评价不良的学生在探索题得分上是否有显著差异。研究结果表明,探索题得分高的学生在教学中有更多的机会进行探究,教师会经常组织学生进行探究活动,也常用恰当的手段、不同的方法呈现知识,多要求学生用多种方法解决探索问题;在问题解答过程中,面对过程描述清晰而富有逻辑性的学生,教师更倾向于鼓励他们表达不同意见和自己的想法。

四、教学启示

统计结果显示,多数学生能够达到“课程标准”要求的探索能力,一小部分学生除了呈现教材中的探索方法,也能从其他角度阐述对相关内容的理解。不过有一些学生几何探索题得分率仍低于数学整体的平均水平,因此,课题组根据相关因素的分析,提出三点教学建议。

1.重视学生数学思维的训练,关注开放性作答

学生在解答探索型数学问题时,多采用教材里的方法,方法单一,缺乏开放性,这不利于“课程标准”中所提倡的“创新意识”的培养。从探索多边形内外角和这两道题来讲,其考查的内容相对开放,不拘泥于某一种知识或方法,如测量、分类、例举、平移、利用求和公式、利用一次函数的知识等。学生需要联系生活、数学中的知识,才能

八年级学生几何探索水平的区域质量监测

达到问题的解决。

“课程标准”认为几何与图形就是用数学符号进行数学思维。数学符号特别是几何符号是图形与几何的抽象艺术,使用数学符号进行数学思维,可以进行运算和推理,而推理包括合情推理和演绎推理。推理是数学的基本思维方式,也是人们学习和生活中经常使用的思维方式,几何探索题就是基于该理念设计的。面对几何探索题,一些学生能够将自己所学知识技能灵活运用在探索中,既能用代数方法解决几何问题,又能与生活中的现象联系起来对结论加以形象描述。将所学内容融会贯通,及时归纳总结知识点与方法并注意彼此之间的区别与联系,学生在面对数学探索问题的开放性作答时将会更有优势。

2.给予学生充分的探索空间,鼓励他们多样化地解决问题

数学教学应根据具体的教学内容,帮助学生获得间接与直接经验,从学生实际出发,创设有助于学生自主学习的问题情境,引导学生通过实践、思考、探索、交流等,获得数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验,促使学生主动地、富有个性地学习,不断提高他们发现、提出、分析、解决问题的能力。

“探索”性目标要求教师在教学中展开探索过程,给学生充分的时间和空间,不能将探索性的要求当成知识的讲解。学生在测试中的表现证明,教学中给予的过程探索的时间是远远不够的。

对于探索性的问题,首先,教师应该给学生充分的探索空间和时间,不能将探索性的要求当成知识的讲解;其次,给学生创设探索活动的平台,设置一系列的问题,让学生展开探索;最后,鼓励学生多样化地表达和解决问题。几何探索性教学应该给予学生更多自主学习的机会,让他们能够真正体验知识的发生、发展过程,并尝试从不同的角度去思考,应用不同的方法去解决问题。

3.融合不同版本的教科书,选择学生适合的学习方式

教科书一标多版的特性决定,每个教科书版本既有它独特的处理方式,也可能存在不足。教师在教学中,不要将教材作为唯一不变的范本,也不能拘泥于一种版本的教科书。教师应该创造性地使用教材,积极开发、利用各种教学资源,为学生提供丰富多彩的学习素材;关注学生的个体差异,有效地实施有差异的教学,使每个学生都得到充分的发展。

教材所选择的学习素材应尽量与学生的生活现实、数学现实、其他学科现实相联系,应有利于加深学生对所要学习内容的数学理解。教材内容的呈现要体现数学知识的整体性,体现重要的数学知识和方法的产生、发展和应用过程;应引导学生进行自主探索与合作交流,并关注学生人文精神的培养。

有的初中数学教科书将探索性内容设置成结果性的内容,既缺乏必要的活动环节,又缺少知识内容的来源、发展、与生活的联系,还未能提供更多的探索方法帮助学生发散理解,面对这样的教学素材,教师应根据学生的实际,收集教学材料,集各家所长于一身,吸取不同版本教材的精华。数学教科书在呈现内容和方式上应该激发学生的学习兴趣,真正引导学生进行深层次思考,以达到“课程标准”自主、开放的要求。有条件的地区,要尽可能合理、有效地使用计算机和有关软件,合理地运用现代信息技术,提高教学的效益。

参考文献:

- [1][2][3]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012.
- [4]黄爽.初中生解数学存在性探索题的差异性研究[D].长春:东北师范大学,2009.
- [5]单建军.小学高年级数学探索题教学的策略研究[D].南京:南京师范大学,2011.

责任编辑/雷 熙