

# 我国八年级学生几何推理能力实证研究

——基于Z市的大规模测试

何声清<sup>1</sup>, 慕春霞<sup>1,2</sup>

(1. 北京师范大学 教育学部课程与教学研究院, 北京 100875;  
2. 北京师范大学 未来教育高精尖创新中心, 北京 100875)

**摘要:**本研究依托大规模纸笔测试,以Z市46579名八年级学生为被试考察其几何推理能力。结果表明,学生的几何推理能力基本达到预期;各数学学业等级学生的几何推理能力存在显著性差异;三大内容领域的学业表现均对其几何推理能力有显著影响;女生的几何推理能力显著优于男生。对课程与教学的建议有:平衡“直观”与“推理”,通过朴素的推理活动培养几何推理能力;加强教学内容领域融合,全面培养学生几何推理能力;摒弃性别偏见,鼓励女生在几何推理方面取得进步。

**关键词:** 八年级; 数学素养; 几何推理; 常规性推理; 创造性推理

**中图分类号:** G612

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1008-0627(2017)06-0118-06

## 一、问题提出

数学推理是指表达(formulate)和表征(represent)某个特定问题并对其进行解释(explain)和证明(justify)的能力。<sup>[1]</sup>在国际数学教育领域,数学推理一直被认为是数学核心素养的重要组成部分之一。例如,美国数学教师协会(NCTM)提出“数学课程要尽早关注学生推理和证明能力的培养”“帮助学生认识到推理在数学学习中的重要地位,合理选择适当的推理方法进行说理”。<sup>[2]</sup><sup>[5]</sup>我国的数学课程也把数学推理作为学科核心素养之一,提出“推理能力的发展应贯穿在整个数学学习过程中……学生通过参与观察、实验、猜想、证明、综合实践等数学活动,发展合情推理和演绎推理能力,清晰地表达自己的想法。”<sup>[3]</sup><sup>[7]</sup>数学推理与数学学业成功及问题解决表现有直接的联系,<sup>[4]</sup>数学学科一旦离开了推理,无疑是被剥夺了最主要的环节。<sup>[5]</sup>

推理能力渗透在数学的各个内容领域,如代数推理、统计推理等。<sup>[6]</sup>几何内容一直是测查

学生数学推理能力的最佳阵地。<sup>[7]</sup>国际比较研究表明,尽管几何领域的课程承载着学生多方面能力(如,推理能力、空间想象能力、表征能力)的培养,几何推理能力在各国数学课程中依然处于核心地位。<sup>[8]</sup>然而研究表明,学校教学对几何推理和证明的重视程度正在下降,<sup>[9]</sup>教师越来越认为几何中的推理无关紧要,<sup>[10]</sup>动态几何软件的发展日益取代了几何教学中的形式推理。<sup>[11]</sup>关于学生几何推理能力的研究也表明,学生的几何推理表现不容乐观。<sup>[12]</sup><sup>[8]</sup><sup>[23]</sup>尽管几何教育的目标越来越多元化(培养学生几何直观能力、空间想象能力、逻辑推理能力等并存),但是几何(而不是代数)仍然是培养数学推理能力最有效的途径。<sup>[13]</sup>本研究依托中国基础教育质量监测的大规模纸笔测试,考察我国八年级学生的几何推理能力现状,并据此对课程和教学提出相应建议。

## 二、研究设计

### (一) 被试

采取大规模纸笔测试的方法从Z市收集数

收稿日期: 2017-08-20

基金项目: 北京师范大学中国基础教育质量监测协同创新中心“区域质量健康体检项目”子项目“中学数学学业质量诊断与反馈”(105006);  
北京师范大学未来教育高精尖创新中心项目“中学数学学科诊断分析工具开发与应用研究”(BJAICFE2016SR-008); 2016年国家建设高水平大学公派研究生项目(留金发[2016]3100)

第一作者简介: 何声清(1988-),男,安徽安庆人,博士生,主要研究方向: 数学教育,数学学业大规模测评。E-mail: hesqmath@mail.bnu.edu.cn

表 1 被试分布一览表

区县	区 47	区 16	区 48	区 49	区 42	区 15	区 45	区 17	区 18	区 66	区 46	Total
<i>N</i>	2425	1381	1329	2189	2531	1300	22342	3858	480	4985	3759	46579

据，该市是我国中部某省会城市，其经济、教育基本处于我国大陆地区省会城市的中上等水平，具有一定的代表性。采取分层随机取样方法，从该市 11 个区（县）的城市、县城、乡镇三类地区抽取 46579 名八年级学生为被试，其中男性被试 24802 名，女性被试 21777 名。选取八年级学生为被试的原因是，国际范围内的数学学业成就测试（如，TIMSS 和 PISA）均以八年级为对象，这为我国数学学业质量监测提供理论和实践基础。见表 1。

(二) 测试题目

几何推理能力的层次划分是试题编制的依据。研究指出，几何推理不应仅限于常规性推理，还要发展学生的创造性推理，<sup>[14]</sup> 这促使项目组在命制试题时充分考虑了几何推理的开放性。需要指出的是，学生的数学能力不是孤立的，我们编制的几何推理能力测试题并不意味着其仅涉及该方面的数学能力，而是主要涉及了该方面的能力。

本测试的几何推理题以解答题形式出现，其内容包括常规性推理和创造性推理。其中，常规性推理是指面临几何推理任务时，通过识别命题、寻找原理（公理、定理、推论、判定等），在规范的规则和形式下，逐步推导结论或求解答案的推理过程。创造性推理是在常规性推理基础上的较高层次几何推理，更加强调猜想、探索和发现的过程，<sup>[15]</sup> 具有一定的开放性和发散性。

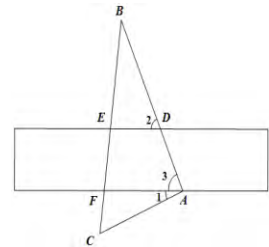
以 M8BS17 题为例，把一块含 60° 角的直角三角板的直角顶点放在直尺的一边上，其中  $\angle B=30^\circ$ （直尺和三角板各边均为直边）。

(1) 当  $\angle 1=20^\circ$  时，求  $\angle BED$  的大小。

(2) 保持三角板顶点 A 在直尺上不动，任意旋转三角板。当  $\angle 2$  为多少度时， $\triangle BDE$  是等腰三角形？写出所有可能的情况。

第 (1) 小题的求解主要是利用三角形内角和定理、特殊直角三角形的性质及平行线的相关性质等进行逐步推导，其知识和能力要求比较基本。我们认为其属于常规性推理。第 (2) 小

题比较开放且答案不唯一，它一方面需要学生对旋转的动态过程进行模拟、探索和猜想，一方面对学生的分类讨论思想提出了较高要求。我们认为其属于创造性推理。



内部一致性系数分析表明，测试卷均具有较高的同质性信度（Cronbach  $\alpha=0.904$ ）。

(三) 测试程序

从试题设计到组织实施，命题组先后经历了组建专家队伍、制定测试方案、编制测试框架及细目表、征集题目、6 人访谈、300 人预测试、国际专家评审等环节，其间几易其稿，明确了每个测试题考察的内容和能力水平，确保了测试的科学性和规范性。

三、研究结果

Z 市八年级学生几何推理的总得分率为 63.9%，不同区学生几何推理得分率情况如图 1。

从图 1 可以发现，除区 47、区 16、区 42 和区 45 以外，Z 市其他地区八年级学生的几何推理能力的得分率均未达到 60%。总体而言，八年级学生的几何推理能力基本到达预期水平。

(一) 不同数学学业水平的学生在几何推理能力上的表现

总项目组采用 Angoff 方法对学生数学学业水平进行了等级标定，将其分为 A、B、C、D 四个水平：A 表示优秀，B 表示良好，C 表示及格，D 表示未达到课标要求。见表 2。

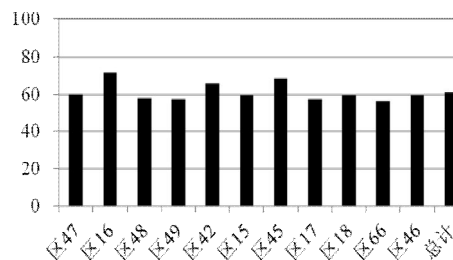


图 1 Z 市不同区八年级学生几何推理能力得分率

表2 八年级学生数学学科学业质量水平描述

水平	水平描述
A	能综合运用基础知识,掌握数学概念,能做数学概念之间的连结,可应用合适的数学方法或建立恰当的数学模型来解陌生或开放性的问题,思考有弹性,能用文字、算式清晰地说明其解题的合理性。
B	具备较为扎实的基础知识,能理解数学概念的特征,应用适当的数学方法或建立简单的数学模型来解比较陌生或没有练习过的问题,思考有条理,能用文字、算式说明解题的合理性。
C	掌握基础知识,能记忆和辨别数学概念,用常规的数学方法解熟悉的或已练习过的问题,思路较清晰,能用文字、算式表示出解题的基本过程。
D	了解基础知识,认识数学概念,在形式标准或熟悉的问题情境中运用常规程序完成单一步骤的、复制基本数学事实的问题。

对不同数学学业等级学生在几何推理能力上的表现进行方差分析。方差齐性检验表明, Levene (3,46575) = 5233.939,  $p < .01$ 。“无法满足方差齐性假设并非方差分析最致命的问题。如果多个样本组的大小不等,则推荐使用 Welch 方差分析。”<sup>[16][129]</sup> Welch (3, 18078.706) = 193355.323,  $p < .01$ , 表明不同的等级组间存在显著性差异。

Dunnnett T3 多重比较表明,各等级学生的几何推理能力均存在显著性差异。见表3。

表3 多重比较

I	J	I-J	SE	P	95% CI	
					Lower	Upper
1	2	-.325	.002	.000	-.331	-.319
	3	-.687	.002	.000	-.691	-.683
	4	-.886	.001	.001	-.889	-.883
2	3	-.362	.002	.000	-.368	-.356
	4	-.561	.002	.000	-.567	-.556
3	4	-.200	.001	.000	-.203	-.196

对 Z 市八年级不同数学学业等级学生的几何推理能力进行描述统计。见表4。

表4 不同数学学业水平的学生几何推理能力

数学学业水平	M	SD
A	0.918	0.078
B	0.718	0.131
C	0.356	0.206
D	0.031	0.075

综上所述,不同数学学业等级的学生其几何推理能力差异显著:A、B、C、D四个等级学生的几何推理得分率分别为91.8%、71.8%、35.6%和3.1%。几何推理作为数学能力之一,其发展有赖于学生数学学业的整体水平。

当学生的数学学业水平优秀或良好时,其几

何推理能力的发展具备了必要的前提,从而能够达到较高的水平;反之,当学生的数学学业水平较低时,则不足以支撑其几何推理能力的发展。此外,对不同数学学业等级学生在常规性推理和创造性推理上的得分率进行描述统计(表5)。

学生常规性推理的得分率为71.9%,创造性推理的得分率为51.7%。各等级学生在创造性

表5 在常规性推理和创造性推理上得分率

水平	常规性推理		创造性推理	
	M	SD	M	SD
A	0.961	.071	0.852	.165
B	0.845	.144	0.528	.227
C	0.476	.280	0.177	.202
D	0.044	.113	0.012	.055
Total	0.719	.342	0.517	.361

推理的得分率均低于相应的常规性推理,A、B、C、D等级学生在常规性推理上的得分率分别为96.1%、84.5%、47.6%和4.4%,而在创造性推理上的得分率则分别为85.2%、52.8%、17.7%和1.2%。无论是常规性推理还是创造性推理,其发展均依赖于学生数学学业水平整体提升。

(二)不同内容领域水平的学生在几何推理能力上的表现

学生在“数与代数”“图形与几何”及“概率与统计”领域的能力水平与其几何推理能力表现均呈显著正相关(所有 $p < .01$ ,  $r$ 分别为0.877、0.928及0.876)。进一步,以学生在三大领域的能力水平为预测因子对其几何推理能力表现进行回归分析。

在模型汇总(表6)中,模型能够解释86.7%的变异。 $F(3, 46575) = 101168.576$  ( $p < .01$ ),表明模型可接受。

表7 回归系数

模型	非标准化系数		标准系数		
	B	SE	$\beta$	t	P
(常量)	-.262	.002		-149.582	0.000
“数与代数”等级	.040	.001	.131	28.962	0.000
“图形与几何”等级	.236	.002	.724	143.216	0.000
“统计与概率”等级	.028	.001	.092	19.764	0.000

表6 模型汇总<sup>b</sup>

模型	R	R <sup>2</sup>	调整 R <sup>2</sup>	SE
1	.931 <sup>a</sup>	.867	.867	.11932

注：a. 预测变量：(常量)，“数与代数”等级，“图形与几何”等级，“概率与统计”等级；b. 因变量：几何推理能力。

用回归系数(表7)对因变量作出预测，其回归方程为：

几何推理能力=-0.262+0.724(“图形与几何”能力水平)+0.131(“数与代数”能力水平)+0.092(“统计与概率”能力水平)。

分析表明，学生几何推理能力的发展首当其冲有赖于其“图形与几何”领域的的能力水平，此外，也在较大程度上有赖于“数与代数”和“统计与概率”领域的的能力水平。几何推理能力的发展不是孤立地依赖于其在“图形与几何”领域的的能力水平，其在“数与代数”和“统计与概率”领域的的能力同样对几何推理能力的发展有较大影响。

进一步，我们对影响几何推理能力最大的内容领域“图形与几何”进行深入分析。对Z市八年级不同“图形与几何”能力水平的学生几何推理能力表现进行描述统计。见表8。

表8 学生几何推理能力

能力水平	M	SD
A	0.921	0.074
B	0.686	0.134
C	0.291	0.175
D	0.028	0.069

A、B、C、D四个等级学生几何推理能力的得分率分别是92.1%、68.6%、29.1%和2.8%。几何推理依赖于学生在“图形与几何”领域知识和能力发展。当学生“图形与几何”领域知识和能力优秀或良好时，其推理能力发展具备了必要前提，能够达到较高的水平。

(三)不同性别学生在几何推理能力上表现对八年级男、女生几何推理能力的表现进行描述统计(表9)。可以看出，Z市八年级女生的几何推理能力得分率均值高于男生。

表9 Z市八年级男、女生几何推理能力比较

性别	M	SD
男	0.613	0.345
女	0.669	0.303
Total	0.639	0.327

进一步，对不同性别学生几何推理能力水平进行差异分析。结果表明，八年级男、女生在几何推理能力上存在显著性差异( $t=-18.394, p < .01$ )。结合表9的结果，Z市八年级女生的几何推理能力显著优于男生。

对不同数学学业水平的男、女生的几何推理能力表现进行描述统计(表10)。

可见，女生各数学学业水平的学生几何推理的得分率均高于同水平的男生。

表10 不同数学学业水平的男、女生的几何推理能力

性别	学业水平	M	SD
男	A	0.913	0.078
	B	0.713	0.133
	C	0.328	0.215
	D	0.021	0.061
女	A	0.923	0.077
	B	0.723	0.128
	C	0.387	0.192
	D	0.051	0.093

对不同性别学生在常规性推理和创造性推理上的得分率进行描述统计(表11)。

可见，女生在常规性推理上的得分率(75.7%)高于男生(68.6%)，在创造性推理上的得分率(53.5%)也高于男生(50.2%)。除了B等级女生在创造性推理上的得分率(52.5%)低于男生(53.0%)，女生其它数学



表 11 不同性别学生在常规性推理和创造性推理上的得分率

性别	学业水平	常规性推理		创造性推理	
		<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>
男	A	0.959	0.073	0.843	0.165
	B	0.835	0.152	0.530	0.221
	C	0.430	0.288	0.174	0.205
	D	0.029	0.091	0.008	0.048
	Total	0.686	0.366	0.502	0.364
女	A	0.964	0.067	0.861	0.164
	B	0.845	0.136	0.525	0.232
	C	0.524	0.262	0.181	0.198
	D	0.073	0.141	0.017	0.066
	Total	0.757	0.308	0.535	0.357

学业等级的学生无论在常规性推理还是创造性推理的得分率均高于同等级的男生。

#### 四、结论与建议

(一) 平衡“直观”与“推理”，通过朴素的推理活动培养几何推理能力

按照 van Hiele 关于几何思维水平的层次划分(视觉、分析、非形式化的演绎、形式化的演绎、严密性)，<sup>[17][71]</sup>即使是创造性推理的测试题目，我们也未对其难度做过高要求。对于本研究中的八年级学生，其思维发展基本处于形式运算阶段(12岁以后)，而其几何推理能力总得分率仅为63.9%，基本达到预期水平。尽管八年级学生尚不足以发展严格的形式化推理，我们认为依然有必要加强其几何推理能力方面的培养。Edwards 曾用“形式证明的外围领域”(territory before proof) 隐喻尚不完全成熟的形式推理阶段，并指出5种推理活动是学生发展纸笔证明能力的必要前提：识别和构造模式(noticing and constructing patterns)、描述模式(describing the pattern)、推测(conjecturing)、归纳推理(inductive reasoning)、演绎推理(deductive reasoning)。<sup>[18]</sup>为此，建议中学阶段的几何课程有效平衡“直观”与“推理”的关系，逐渐通过“朴素”的推理活动培养学生的几何推理能力。

(二) 加强数学内容领域融合，全面培养学生几何推理能力

无论是常规性推理还是创造性推理，其发展均依赖于学生数学学业水平的整体提升。更具体地，几何推理能力的发展不是孤立地依赖于其在

“图形与几何”领域的知识和能力水平，其在“数与代数”和“统计与概率”领域的知识和能力同样对几何推理能力的发展有较大影响。为此，建议加强各数学内容领域的融合，全面培养学生几何推理能力。

(三) 摒弃性别偏见，鼓励女生在几何推理方面取得进步

人们对数学能力“男强女弱”的刻板印象长期存在。然而新近研究表明，男、女生在数学学习方面的性别鸿沟正在缩小甚至消失。<sup>[19]</sup>实际上，不同国家和地区学生数学学习性别差异的表现不尽相同。例如，新近的一项研究表明，尽管在得分上男生略高于女生，男、女生在数学学业成就上的差异已不再显著。<sup>[20]</sup>研究表明，女生在复杂数学问题解决任务上的表现已经接近甚至优于男生。<sup>[21]</sup>在几何内容领域，“男强、女弱”现象在一些国家(如新加坡、挪威、新西兰等)甚至出现了扭转。<sup>[22]</sup>“男强、女弱”的偏见不但对女生数学学习的动机造成负面影响，也会促使数学学习性别差异的鸿沟不断扩大。<sup>[23]</sup>

#### 参考文献

- [1] KILPATRICK J, SWAFFORD J, FINDELL B. Adding It up: Helping children learn mathematics[M]. Washington, DC: National Academy Press, 2001: 5.
- [2] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Principles and standards for school mathematics [S]. Reston, VA: Author, 2000: 56.
- [3] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准(2011年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012.

- [4] KRAMARSKI B, MEVARECH ZR, LIEBERMAN A. Effects of multilevel versus uni-level meta-cognitive training on mathematical reasoning [J]. *Journal of Educational Research*, 2001, 94(5): 292-301.
- [5] KNUTH E. Proof as a tool for learning mathematics [J]. *Mathematics Teacher*, 2002, 95(7): 486-490.
- [6] 刘晓玫, 杨裕前. 关于推理能力问题的几点思考[J]. *数学教育学报*, 2002(5): 54-56.
- [7] MASON M M, MOORE SD. Assessing readiness for geometry in mathematically talented middle school students [J]. *Journal of Secondary Gifted Education*, 1997, 8(3): 105-111.
- [8] 苏洪雨. 学生几何素养的内涵与评价研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2009: 34-37.
- [9] HANNA G. A critical examination of three factors in the decline of proof [J]. *Interchange*, 2000, 31(1): 21-33.
- [10] NOSS R. Structure and ideology in the mathematics curriculum [J]. *For the Learning of Mathematics*, 1994, 14(1): 2-10.
- [11] HADAS N, HERSHKOWITZ R & SCHWARZ BB. The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2000, 44(1): 127-150.
- [12] HAREL G, SOWDER L. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof [M]// F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age, 2007: 805-842.
- [13] 鲍建生. 几何的教育价值与课程目标体系[J]. *教育研究*, 2000(4): 53-58.
- [14] BOESEN J, LITHNER J & PALM T. The relation between assessment tasks and mathematical reasoning [J]. *Educational Study Mathematics*, 2010: 89-105.
- [15] 鲍建生, 周超. 影响学生高层次数学认知能力的因素分析[J]. *中学数学月刊*, 2010(9): 1-4.
- [16] 李文玲, 张厚粲. 教育与心理定量研究方法与分析[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008: 129.
- [17] VAN HIELE PM, VAN HIELE-GELDOF D. A method of initiation into geometry at secondary school [M]// H. Freudenthal (Ed.) *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen, The Netherlands: J. B. Wolters, 1958: 67-80.
- [18] EDWARDS L. Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer micro-world for transformation geometry [J]. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1997, 2(1): 187-215.
- [19] HYDE JS, LINDBERG SM, LINN MC, et al. Gender similarities characterize math performance [J]. *Science*, 2008: 321, 494-495.
- [20] VALE C. Trends and factors concerning gender and mathematics in Australasia [J]. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education, International Commission on Mathematical Instruction*, 2008, 1-8.
- [21] HYDE JS, MERTZB JE. Gender, culture, and mathematics performance [J]. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, 2009( 22): 8801-8807.
- [22] ELSE-QUEST NM, HYDE JS, LINN MC. Cross-national patterns of gender differences in mathematics and gender equity: A meta-analysis [J]. *Psychological Bulletin*, 2010, 136: 103-127.
- [23] MUTEMERI J, MUGWENI R. The extent to which mathematics instructional practices in early childhood education in Zimbabwe relates to or makes use of children's experiences [J]. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 2005, 9(1): 49-54.

## Empirical Research on Eighth Graders' Geometric Reasoning on a Large-scale Test in a City

HE Sheng-qing<sup>1</sup>, QI Chun-xia<sup>1,2</sup>

(1. Faculty of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. Beijing Advanced Innovation Center for Future Education, Beijing 100875, China)

**Abstract:** This paper selected 46579 eighth graders from a Z city to participate in a large-scale test to investigate the geometric reasoning. The results showed that students' geometric reasoning ability basically reached the expected level while significant differences existed among varied mathematics academic levels, that the performance of the three content fields had varying significant influence on geometric reasoning, and that girls' geometric reasoning was significantly higher than boys'. This suggested that such steps could be taken to enhance students' geometric reasoning capability as balanced "visualization" and "reasoning", simple reasoning activities, mathematics content integration, elimination of gender bias, and girls' encouragement in geometric reasoning.

**Key words:** eight graders; mathematics literacy; geometric reasoning; conventional reasoning; creative reasoning

(责任编辑 周密)