

# 基础教育阶段数学课程内容的国际比较研究

## ——基于六国“数与运算”课程内容的研究

■严虹 曹一鸣

DOI:10.16477/j.cnki.issn1674-2311.2017.04.014

**摘要:**数与运算是中小学数学课程中数与代数部分的基础内容,历来受到国内外数学教育家们的关注。研究选择澳大利亚、中国、英国、新加坡、美国、南非共六个国家作为代表国家,围绕“数与运算”内容的主题选择、主题连续情况、主题分布情况以及逻辑结构进行国际比较研究,得出我国数与运算内容设置的基本特征:我国知识主题最早开始年级、最晚结束年级比起六国平均水平整体偏前;我国知识主题设置时间段比较集中;我国在知识单元分布上与其他五国相比有着明显差异。

**关键词:**基础教育;数学课程设置;比较研究;数与运算

**基金项目:**2015年度教育部人文社会科学研究项目“基于连贯性视阈的基础教育阶段数学课程国际比较研究”(项目编号:15YJC880104)。

**中图分类号:**G423

**文献标志码:**A

**文章编号:**1674-2311(2017)4-0096-08

**作者简介:**严虹,女,贵州师范大学数学科学学院教授,教育学博士,主要从事数学课程国际比较研究(贵州贵阳 550001);曹一鸣,男,北京师范大学数学科学学院教授,博士生导师,全国数学教育研究会理事长,主要从事数学课程与教学论研究(北京 100875)。

### 一、问题的提出

数与运算是中小学数学课程中数与代数部分的重要内容。数是数学中最基本的概念之一,它是由人类生活和生产实践的需要,逐步形成和发展起来的,也是人类文化的伟大创造之一。数的运算伴随着数的形成与发展不断丰富。运算能力,与空间想象能力、逻辑思维能力,都是中小学生学习数学能力的基本内容。另外,数学运算作为数学核心素养之一,是解决数学问题的基本手段,是一种演绎推理,是计算机解决问题的基础。而数的运算作为数学运算的重要内

容和基础,其重要程度毋庸置疑。因此,数与运算作为中小学数与代数部分的基础,作为公民数学素养的基本组成部分,它的内容选择和组织,历来受到我国数学课程编制者们的关注。

随着经济全球化的发展,教育元素全球流动,教育资源全球配置,教育手段日新月异,教育国际化成为教育改革和发展高频点击的热点话题。它山之石可以攻玉,由于数学本身的社会地位以及数学作为一门学科的自身特点,为关于数学的国际比较研究提供了内在的必要条件,数学教育国际比较也因此成为教育国际比较研究的重要领域。

然而,纵观近年来国内数学教育研究,几乎没有发现聚焦于“数与运算”内容学术论文的刊出,而相关的学位论文也是寥寥无几<sup>[1]</sup>,相关的研究只蕴含在“数与代数”的整体分析之中<sup>[2]</sup>,由于篇幅所限以及关注问题的分散,“数与运算”内容往往浅尝辄止,在研究深度上有所欠缺。另一方面,关于课程内容的研究主要集中于某一个具体学段(小学、初中、义务教育阶段或高中阶段),几乎没有发现基于基础教育阶段整体性的研究。综合以上情况,本文选择“小学-初中-高中”现行的数学课程标准文本作为研究对象,以“数与运算”内容为例,基于国际比较研究视阈,探索相应知识主题的选择情况、设置时间、连续情况、分布情况以及逻辑结构等等,以期对我国“数与运算”内容的选择和组织提供一定的启示与参考。

二、研究设计

(一)研究对象的选取

样本国家的选取综合考虑了地域位置、经济状况、文化背景、数学教育背景等因素,除我国之外在全球范围内选择了五个代表国家:澳大利亚、英国、新加坡、美国、南非(六个国家以国家代码首字母进行排序,分别是澳大利亚、中国、英国、新加坡、美国、南非),六个国家中小学现行国家数学课程标准(各国对于“课程标准”名称各不相同,为了全文行文一致,本文中统称为“某国课程标准”)文本见表1。

(二)研究思路与方法

本文以六个国家现行数学课程标准文本为研究对象,采用内容编码、描述统计、比较研究等定性与定量相结合的研究方法。在国际比较研究项目数学课程框架基础上,结合比较国家实际情况,确定“数与运算”内容中5个知识单元共19个知识主题作为本研究理论框架,进而针对TIMSS传统课程分析工具“主题追踪图”的不足加以改进,创立了“加权主题追踪图”(WTM)作为研究工具,以各国文本中内容标准的最小整句(即内容条目)为基本单位,分别绘制“数与运算”

内容的“加权主题追踪图”,从主题覆盖程度,最早开始年级、最晚结束年级,主题连续情况,主题分布情况以及逻辑结构等方面进行比较与分析,从而为我国“数与运算”内容的选择和设置提供一定启示。

表1 选取国家现行国家课程标准文本

国家	主体学制	现行国家课程标准	
		颁布时间	文本名称
澳大利亚	小学初中	2014	澳大利亚课程:数学 F-10 <sup>[3]</sup> 7.2版本
	高中	2014	澳大利亚课程:数学 高中 <sup>[4][5]</sup> 7.2版本
中国	小学初中	2012	义务教育数学课程标准(2011年版) <sup>[6]</sup>
	高中	2003	普通高中数学课程标准(2003年) <sup>[7]</sup>
英国	小学	2013	数学学习计划:关键阶段1、2(英格兰国家课程) <sup>[8]</sup>
	初中	2013	数学学习计划:关键阶段3(英格兰国家课程) <sup>[9]</sup>
	高中	2014	数学学习计划:关键阶段4(英格兰国家课程) <sup>[10][11]</sup>
新加坡	小学	2006	数学教学大纲:小学 <sup>[12]</sup>
	初中	2013	数学教学大纲T:GCE标准(技术)水平 <sup>[13]</sup> 数学教学大纲A:GCE标准(学术)水平 <sup>[14]</sup> 数学教学大纲O:GCE普通水平 <sup>[15]</sup>
	高中	2013	数学H1教学大纲 <sup>[16]</sup> 数学H2教学大纲 <sup>[17]</sup> 数学H3教学大纲 <sup>[18][19]</sup>
美国	小学初中 高中	2010	统一核心州数学标准 <sup>[20][21]</sup>
南非	小学	2012	课程与评价政策标准 基础阶段 数学1-3年级 <sup>[22]</sup> 课程与评价政策标准 基础阶段 数学4-6年级 <sup>[23]</sup>
	初中	2012	课程与评价政策标准 高级阶段 数学7-9年级 <sup>[24]</sup>
	高中	2012	课程与评价政策标准 继续教育和训练阶段 数学10-12年级 <sup>[25][26]</sup>

注:英国将11年义务教育分为四个关键阶段(Key Stages),国内学界一般将关键阶段1(year1, year2)和关键阶段2(year3, year4, year5, year6)等同于国内小学阶段。而对于初中、高中阶段的划分,国内学界存在一定争议,考虑到数学课程标准的官方性质,参考曹一鸣《十三国数学课程标准评介(高中卷)》一书中划分标准,将关键阶段3(year7, year8, year9)等同于国内初中阶段,将关键阶段4(year10, year11)等同于国内高中阶段。

三、“数与运算”内容知识主题的比较研究

(一)知识主题组织基本情况

基于国际比较研究项目的数学课程框架<sup>[27][28][29]</sup>

以及相关研究<sup>[30]</sup>,选取其中“数与运算”内容,结合六国实际情况,经过两轮次(理论探索→实践修正)调适,最终确定包含5个知识单元(19个知识主题)的理论编码框架见表2。

表2 本研究理论框架及编码体系

1级指标及编码	2级指标及编码
1 自然数与运算	11 自然数意义;12 自然数运算;13 自然数运算性质
2 分数、小数与运算	21 分数意义;22 分数运算及性质;23 小数意义;24 小数运算及性质;25 百分数与运算;26 分数、小数、百分数之间的关系
3 整数、有理数、实数与运算	31 整数与运算;32 有理数与运算;33 实数与运算
4 其他的数与运算	41 复数与运算;42 指数、根数、对数与运算;43 数论;44 排列与组合
5 估算和数感	51 估计数量和大小;52 近似值和有效数字;53 估算

在此基础上,将各国课程标准文本中相关课程内容进行编码并统计(对于同一条内容条目涉及2个及以上知识主题的情况,以平均值分别计入各个主题,比如,某个内容条目同时涉及2个知识主题A和B,在统计过程中,A、B计数各为0.5),根据内容条目的数量设置权重,分别绘制六个国家“加权主题追踪图”。见图1-图6。

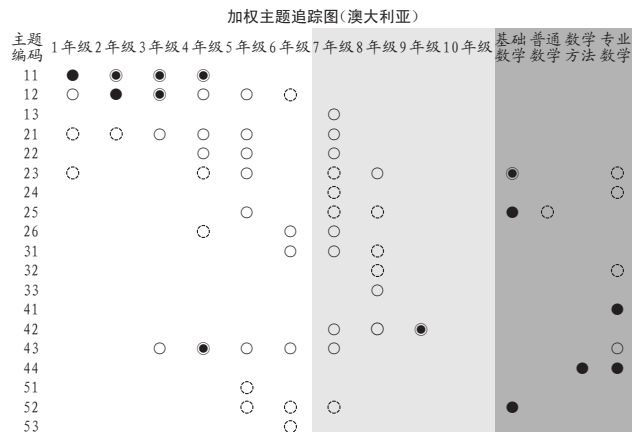


图1 澳大利亚加权主题追踪图

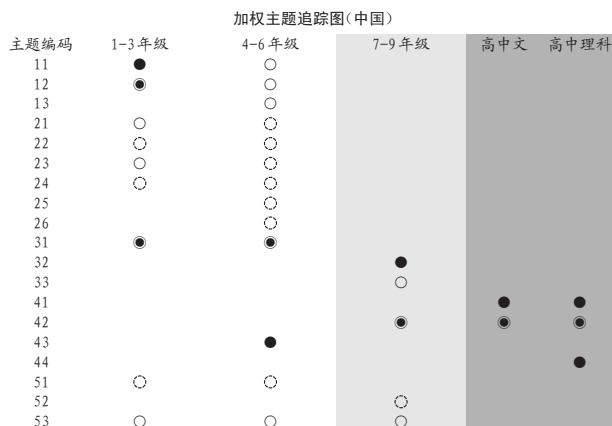


图2 中国加权主题追踪图

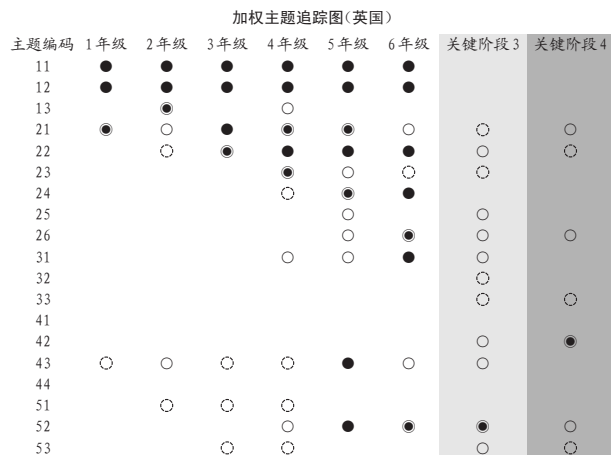


图3 英国加权主题追踪图

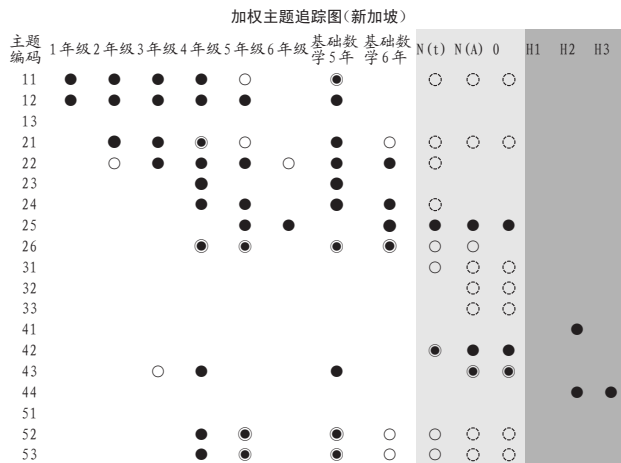


图4 新加坡加权主题追踪图

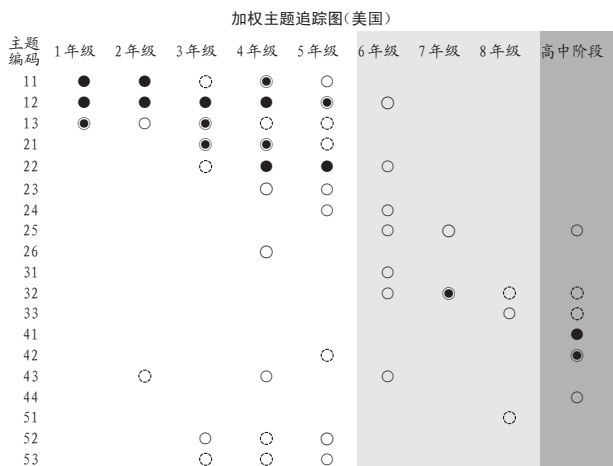


图5 美国加权主题追踪图

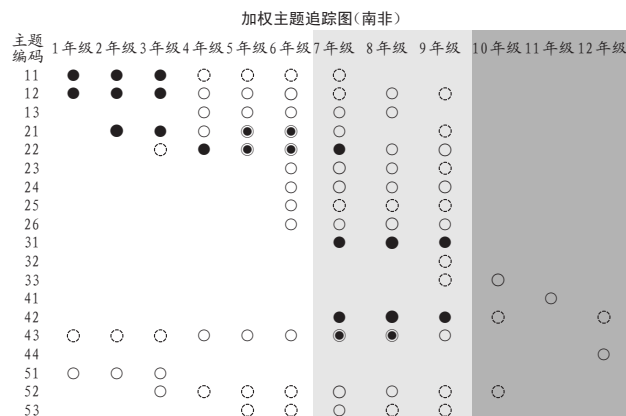


图6 南非加权主题追踪图

注:加权主题追踪图是针对TIMSS传统课程分析工具“主题追踪图”的改进版,通过课程标准文本内容条目的编码和统计,图释○表示该年级(或阶段)内容条目数量为 $n$ ( $n<1$ )条,图释◐表示该年级(或阶段)内容条目数量为 $n$ ( $1\leq n<2$ )条,图释◑表示该年级(或阶段)内容条目数量为 $n$ ( $2\leq n<3$ )条,图释●表示该年级(或阶段)内容条目数量为 $n$ ( $n\geq 3$ )条。

## (二)主题最早开始年级、最晚结束年级

根据加权主题追踪图,逐一统计了六国19个主题的最早开始年级、最晚结束年级;同时,为了便于与我国进行比较,以六国各个主题最早、最晚年级的平均值代表六国综合情况。见图7-图10。

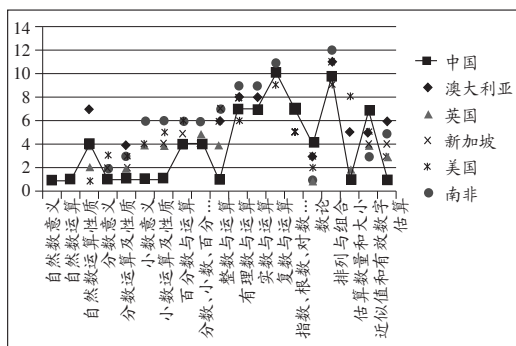


图7 六国主题最早开始年级

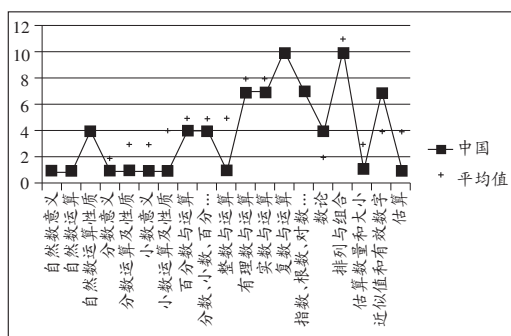


图8 我国、六国均值主题最早开始年级

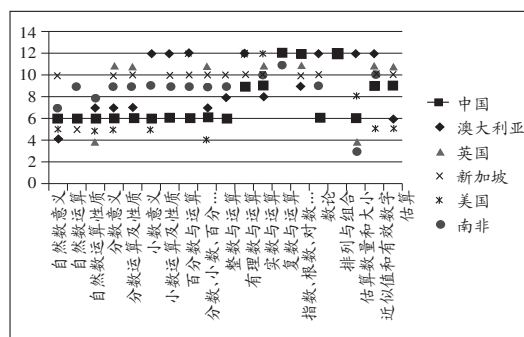


图9 六国主题最晚结束年级

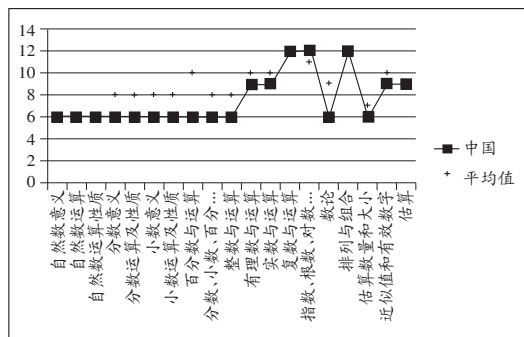


图10 我国、六国均值主题最晚结束年级

注:为了更为细致地研究各国基本情况,统计主题早晚年级时,课程标准文本中以“阶段”表述的主题,统一将该阶段起始年级作为主题的最早开始年级,将该阶段结束年级作为主题的最晚结束年级。

可以看出,我国绝大多数主题早于(或同时)其他5国最早开始年级。就六国平均水平而言,我国共有12个知识主题早于最早开始年级,其中,“整数与运算”设置在1年级开始,六国均值设置在5年级开始,前置了4年;“小数运算及性质”、“估算”设置在1年级开始,六国均值设置在4年级开始,前置了3年。我国仅有“数论”、“近似值和有效数字”2个知识主题晚于最早开始年级,“数论”设置在4年级开始,六国均值设置在2年级开始;“近似值和有效数字”设置在7年级开始,六国均值设置在4年级开始。

另一方面,我国绝大多数主题同样早于(或同时)其他5国最晚结束年级。就六国平均水平而言,我国共有12个知识主题早于最晚结束年级,其中,“百分数与运算”设置在6年级结束,六国均值设置在10年级结束;“数论”设置在6年级结束,六国均值设置在9年级结束。我国仅有“指数、根数、对数与运算”知识主题略晚于最晚结束年级。

虽然我国课程标准文本中内容标准是以学段的形式呈现,一定程度上导致与其他国家可比性下降。然而,从某种程度上仍然可以说明,我国“数与运算”内容的最早开始年级、最晚结束年级(课程设置时间点)在六国之中明显整体前移,也说明了我国课程内容难度较大。

### (三)主题连续情况

在主题开始、结束年级的研究基础上,进一步比较与分析了主题连续情况。首先,将各国“数与运算”内容知识主题按照阶段(小学、初中、高中)跨度,即主题缺失、涉及1个阶段、涉及2个阶段、涉及3个阶段进行统计,所占比重如图11所示。

可以发现,知识主题同时横跨3个阶段(小学、初中、高中)均有某个知识主题内容条目的国家有澳大利亚、英国、南非,其中澳大利亚比重最大(26.32%),知识主题涉及:小数意义、小数运算及性质、百分数与运算、数论、近似值和有效数字。英国知识主题涉及:

分数意义、分数运算及性质、分数小数百分数之间的关系、近似值和有效数字。南非知识主题为近似值和有效数字。3个国家均在“近似值和有效数字”主题横跨3个阶段,说明该主题较为重要,教学持续时间很长,而这一主题我国仅在初中阶段,并且开始年级明显晚于六国的平均水平。

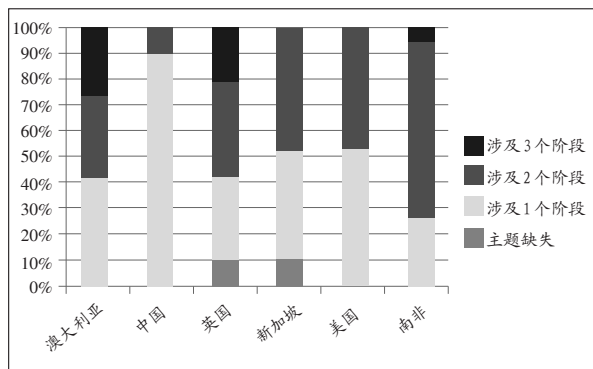


图11 主题阶段跨度分布图

六国均有同时横跨2个阶段的主题,其中,我国比重最小(10.53%),而其余国家比重均在30%以上,差异非常明显。而在各自国家内部,澳大利亚、中国、美国都在“涉及1个阶段”中所占比重最大,其中我国比重在六国中是最大(89.47%),南非比重最小(26.32%)。就我国而言,主题只有涉及1个阶段、2个阶段的情况,且绝大部分集中在“涉及1个阶段”,从某种程度上说明我国主题跨度在六国中是最小的,课程内容设置呈现出集中性的特征。

其次,将各国“数与运算”内容知识主题连续性,即主题缺失、涉及一个年级(阶段)、年级(阶段)间连续、年级(阶段)间中断进行统计,所占比重如图12所示。

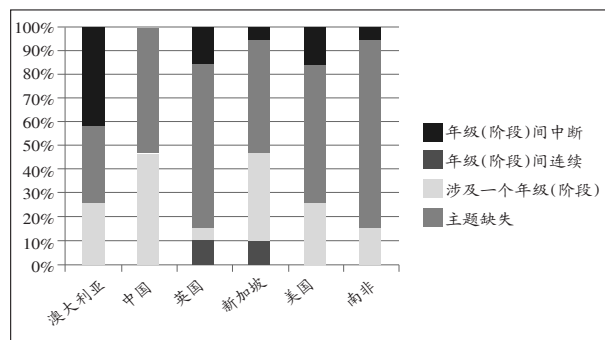


图12 主题内容连续性分布图



可以发现,年级(阶段)间中断比重最大的是澳大利亚(42.11%),我国是唯一没有出现中断的国家,新加坡、南非中断比重也较小(5.26%)。年级(阶段)间连续比重最大的是南非(78.95%),这与其课程标准文本中出现大量复习内容有一定关系,比重最小的是澳大利亚(31.58%)。仅涉及单年级(阶段)比重最大的是我国(47.37%),比重最小的是英国(5.26%)。就我国而言,没有出现年级(阶段)间中断的主要原因可能在于课程标准文本以阶段(1-3年级,4-6年级,7-9年级)形式呈现,较之其他5国信息统计量较小;另外,我国知识主题比较集中,绝大多数仅涉及单一阶段。从某种程度上说明我国主题在连续性上表现得较为集中。

#### (四)主题分布情况

关于主题分布情况的比较与分析,一方面,基于纵向线索,根据各国主题在不同学习阶段分布情况逐一进行统计,如图13所示。

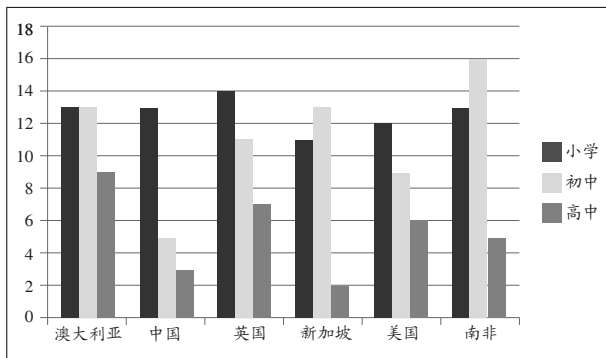


图13 主题阶段分布图

注:各国小学、初中、高中阶段有多于一门数学课程的情况,按照平均值统计,比如,澳大利亚高中共有4门数学课程,以4门课程主题数量平均值代表该国高中阶段主题数量。

不难看出,六国在小学阶段涉及的知识主题均为10个以上,数量相差不大,其中英国最多(14),新加坡最少(11);初中阶段差异较大,其中南非最多(16),我国最少(5);高中阶段主题数量均较少,均在10个知识主题以下。就我国而言,主题阶段数量呈现出较为明显的逐级下降趋势,与英国、美国较为相似。

另一方面,基于横向线索,根据各国“数与运算”主题内容条目数量在5个知识单元的分布情况逐一进

行统计,如图14所示。

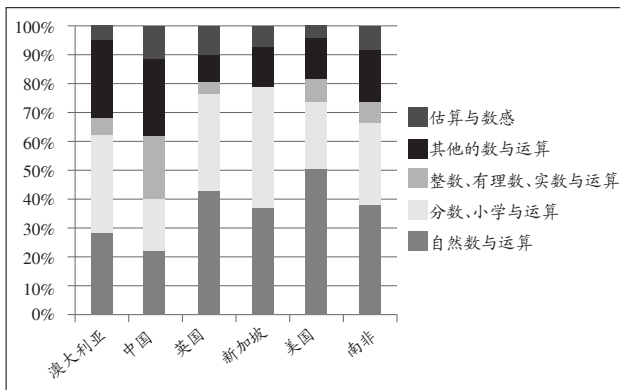


图14 主题知识单元分布图

不难看出,在知识单元“自然数与运算”中,六国所占比重均在20%以上,其中最高的是美国(50.51%),最低的是我国(22.22%),且远低于平均水平(36.52%)。“分数、小数与运算”中,除了我国(17.78%)之外,其余5国所占比重均在20%以上,远低于平均水平(29.92%)。在“整数、有理数、实数与运算”中,除了我国(22.22%)之外,其余5国所占比重均低于10%,远高于平均水平(8.01%)。

由此可见,我国在知识单元分布上与其他5国相比有着明显差异。其他5国比较重视的主题“自然数与运算”、“分数、小数与运算”,我国所占比重偏低;而对于“整数、有理数、实数与运算”,我国所占比重明显偏高;另外,我国也是六国“估算与数感”比重最高国家。

#### (五)主题逻辑结构

逻辑严密性是以数学为代表的自然科学显著特征之一。不仅如此,数学学科的逻辑结构还被作为测量其课程连贯性的重要指标。本文尝试整合六国课程内容设置基本情况,设计合理算法(算法简介。首先,绘制各个国家中小学加权主题追踪图,对于阶段处理情况,将其主题设置要求同等水平分布到该阶段涉及的各个年级。其次,是否在某一年级设置主题:针对某一主题,如果在某个年级同时有3个及以上国家要求设置该主题,则确定设置;反之则不设置。如

何确定某一年级主题设置权重:以该年级各个国家要求水平众数代表参考模型中该主题的权重。最后,按照各个主题出现先后顺序重新排序),绘制基于六国的“数与运算”主题设置参考模型,如图15所示。

主题	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
自然数意义	●	●	●	●	○	○						
自然数运算	●	●	●	●	○	○						
分数意义	○	○	●	●	●	○	○	○	○			
数论		○	○	○	○	○	○	●	○			
分数运算及性质			○	●	●	●	○					
估计数量和大小			○	○	○							
估算			○	○	○	○	○	○	○			
自然数运算性质				○	○							
小数意义				○	○	○	○	○				
小数运算及性质				○	●	○						
分数小数之间的关系				○	○	○	○	○	○			
近似值和有效数字				○	○	○	○	○	○	○		
百分数与运算					○	○	○	○	○			
整数与运算						○	○	○	○			
有理数与运算							○	○	○			
指数根数对数与运算							○	○	●	●		
实数与运算								○	○	○		
复数与运算											●	
排列与组合											●	●

图15 “数与运算”参考模型

不难发现,我国课程设置与参考模型的差别主要集中在1-3年级、4-6年级,具体见图16。1-3年级设置的主体数量较多,比如“小数意义”、“小数运算及性质”、“整数与运算”,较之参考模型设置靠前,参考模型中这3个主题均设置在4-6年级。同时,我国“数论”、“近似值和有效数字”主题设置较为滞后,数论我国将其设置在4-6年级,而参考模型中首次出现在2

主题	1-3年级	4-6年级	7-9年级	高中文科	高中理科
11 自然数意义	●	○			
12 自然数运算	●	○			
21 分数意义	○	○			
22 分数运算及性质	○	○			
23 小数意义	○	○			
24 小数运算及性质	○	○			
31 整数与运算	●	●			
51 估计数量和大小	○	○			
53 估算	○	○	○		
13 自然数运算法则		○			
25 百分数与运算		○			
26 分数、小数、百分数之间的关系		○			
43 数论		●			
32 有理数与运算			●		
33 实数与运算			○		
42 指数、根数、对数与运算			●	●	●
52 近似值和有效数字			○		
41 复数与运算				●	●
44 排列与组合					●

图16 中国“数与运算”主题设置情况

年级,近似值和有效数字我国将其设置在初中阶段,而参考模型中首次出现在4年级。

另一方面,关于数与运算内容的重点主题。我国与参考模型有较大出入,我国将“自然数意义”、“数论”、“有理数与运算”、“复数与运算”、“排列与组合”作为主题的强调重点;然而,参考模型中将“自然数意义”、“自然数运算”、“分数意义”、“分数运算及性质”、“复数与运算”、“排列与组合”作为主题的强调重点。从一定程度上反映出参考模型更为重视“数与运算”基础知识的把握(自然数与运算、分数与运算)。

#### 四、研究结论

通过内容选择与组织基本情况的国际比较研究,得出我国基础教育阶段课程标准文本中“数与运算”内容设置具有基本特征如下。

第一,知识主题设置时间点明显偏前。我国知识主题最早开始年级、最晚结束年级比起六国平均水平整体偏前:19个知识主题中有12个最早开始年级比起六国平均水平前置,比如“小数运算及性质”“整数与运算”“估算”我国均设置在第一学段开始,而六国平均时间分别为4、5、4年级;有12个最晚结束年级比起六国平均水平前置,比如“分数意义”、“分数运算与性质”、“小数意义”、“小数运算与性质”、“百分数与运算”我国设置在第二学段结束,而六国平均时间分别为8、8、8、8、10年级。说明我国数与运算内容在课程设置时间上整体较为前置,这在一定程度上也导致课程难度的增加。

第二,知识主题设置时间段比较集中。我国数与运算知识主题绝大多数仅设置在某一个阶段(主要是小学),是“涉及一个阶段”比重最高的国家(89.47%),远高于六国比重的均值(47.37%),某种程度上也可以说我国是其中知识主题时间跨度最小的国家。然而,对于一些重要的知识主题,适当延长设置时间段对其进行强化有时也是必要的。比如“数论”反映了自然数基本属性,“近似值和有效数字”有效训练了学生

“数感”能力,这些知识主题都可以适当地延长设置时段。

第三,知识单元分布比重合理性有所欠缺。我国在知识单元分布上与其他5国相比有着明显差异,比如在1-12年级数与运算课程内容中,作为基础内容的“自然数与运算”单元所占比重最低(22.22%),远低于六国平均水平(36.52%);“分数、小数与运算”单元所占比重也是六国中最低的;而作为其延伸内容的“整数、有理数、实数与运算”单元所占比重却是六国中最高的(22.22%),远高于六国平均水平(8.01%)。作为数与运算内容基础知识的“自然数与运算”,与作为延续知识的“整数、有理数、实数与运算”所占比重相当,如此分布使得我国数与运算课程设置相比较而言略有头重脚轻之嫌。

#### 参考文献

- [1]朱黎生.指向理解的小学“数与运算”内容的教材编写策略研究[D].西南大学博士学位论文,2013.
- [2]刘长明,孙连举.中美初中阶段“数与代数”领域内容标准的比较研究[J].数学教育学报,2004,(4):45-48.
- [3][4] ACARA. The Australian Curriculum: Mathematics [EB/OL]. <http://www.australiancurriculum.edu.au/>. 2014-09-01/2014-11-03.
- [5]康玥媛.澳大利亚全国统一数学课程标准评析[J].数学教育学报,2011,(5):81-85.
- [6]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2012:16-41.
- [7]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验)[S].北京:人民教育出版社,2003:12-65.
- [8] [9] [10]Department of Education. National curriculum in England: mathematics programmes of study [EB/OL].<https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>. 2013-09-01/2014-11-03.

mathematics-programmes-of-study. 2013-09-01/2014-11-03.

- [11]徐文彬,杨玉东.英国国家数学课程标准的确立与变革及其启示[J].数学教育学报,2002,(3):48-51.
- [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] Singapore Examinations and Assessment Board. Mathematics Syllabus[EB/OL].[https://www.seab.gov.sg/pages/nationalExaminations/PSLE/general\\_information.asp](https://www.seab.gov.sg/pages/nationalExaminations/PSLE/general_information.asp). 2013-09-01/2014-11-03.
- [19]宁连华,崔黎,金海月.新加坡高中数学课程标准评介[J].数学教育学报,2013,(4):1-5.
- [20]Common Core State Standards Initiative.Common Core State Standards for Mathematics [DB/OL]. <http://www.corestandards.org/Math/>. 2010-09-01/2014-11-03.
- [21]曹一鸣,王立东,Paul Cobb.美国统一州核心课程标准高中数学部分述评[J].数学教育学报,2010,(5):8-11.
- [22] [23] [24] [25]CAPS.Curriculum and Assessment Policy Statement Foundation Phase Mathematics[DB/OL]. <http://www.education.gov.za/Curriculum/NCSGradesR12/CAPS/tabid/420/Default.aspx>. 2013-09-01/2014-11-03.
- [26]李娜,曹一鸣,Lyn Webb.南非国家高中数学课程与评价标准评介[J].数学教育学报,2013,(4):6-10.
- [27]IEA. TIMSS Monograph No 1: Curriculum Framework for Mathematics and Science [M]. Pacific Educational Press, 1997:75-84.
- [28]Andrew C. Porter, John L. Smithson. Defining, Developing, and Using Curriculum Indicators [R]. Consortium for Policy Research in Education, 2001:25-28.
- [29]CCSSO. Coding Procedures for Curriculum Content Analyses [DB/OL]. <http://seconline.wcruw.org/~resources.asp>. 2009-09-01/2014-11-03.
- [30]康玥媛.六国小学初中数学课程标准的国际比较研究[D].北京师范大学博士学位论文,2012.

责任编辑:肖第郁