

PISA 数学素养测评主要结构

文 / 周明旭 曹一鸣

一、什么是数学素养

近年来，数学素养越来越受到人们的关注。事实上，数学素养这一名词对于教师而言并不陌生。2001年《全日制普通高级中学数学教学大纲（试验修订版）》提出：使学生在高中阶段继续受到数学教育，提高数学素养，对于提高全民族素质，为培养社会主义现代化建设所需要的人才打好基础是十分必要的。新世纪的课程改革，特别是正在修订的高中数学课程标准，数学素养则受到了更多的重视。但是数学素养到底是什么，由于对数学教育的理解、认识以及传统，甚至包括语言差异，还没有能够形成完全统一的认识。

我国学者对数学素养的认识也不尽相同。张奠宙先生认为数学素养就是数学思维能力，也就是数学运算能力、逻辑思维能力和空间想象力，其中核心是逻辑思维能力。^[1]还有学者认为数学核心素养是数学课程目标的集中表现，在学生自主发展中发挥不可替代的作用，是在数学学习过程中逐步形成的。数学素养包含具有数学基本特征的必备思维品格和关键能力，是数学知识、技能、能力及情感、态度、价值观的综合体现。^[2]也有学者认为，数学素养包含数学思维、数学意识、创新意识、用数学的意识、欣赏数学

的美学价值等几个方面。^[3]

国际上，由于PISA的广泛影响力，并且2012年的PISA测试，数学再一次成为了主测试领域，并修订了数学素养的定义及其测评的主要框架。这一框架在国际范围内得到了较高的认可度。PISA 2012对数学素养的定义如下：

数学素养是个人在不同情境下用公式表述、使用和解释数学的能力。它包括数学推理能力和使用数学概念、过程、事实和工具来描述、解释以及预测现象的能力。它有助于个体作为一个关心社会、善于思考的建设性公民来识别数学在世界中所起作用及做出有根据的数学判断和决定。

这个定义指出，数学素养是一种个人能力，并指明是在实际情境中的核心能力。在这个定义里，数学素养与数学建模能力很相近，因为它的基本过程是表述数学模型，在模型中运用数学知识和技能，解释和评估数学结果。从这个定义中也可以看出，不论是在具体的数学概念和技巧，还是在一般的数学推理上，数学的各个方面都与数学素养都是相关的。PISA中数学素养的定义突显了数学素养的功能性目的，即增加对真实世界现象的理解，从而有助于人们在生活的各个领域里做出正确的决定。^[4]

二、数学素养的测评

PISA 测试的核心是对素养的评价，如何对素养评价是 PISA 中重要的内容。在 PISA 数学测试框架中给出了数学素养测评的主要结构以及它们之间的相互关系，如图 1 所示。最外侧的框图是表明在面对真实世界问题情境的挑战时需要

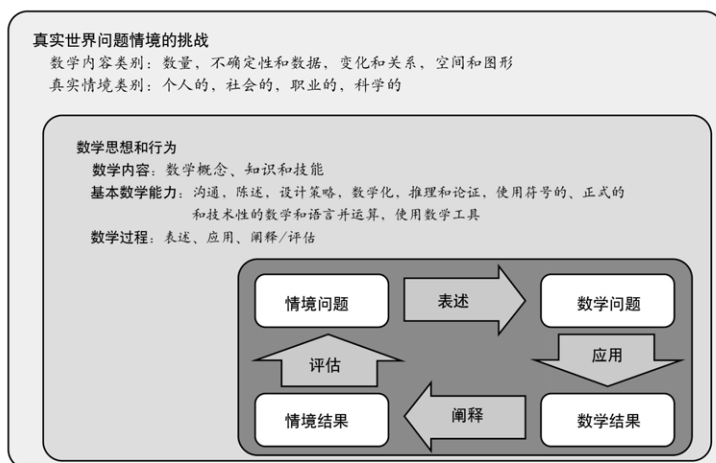


图 1
PISA 2012
数学素养实
践模型

世界问题情境的挑战时需要数学素养，这些挑战可以从两个方面分类：数学内容类别和真实情境类别，每个方面又包含了四个不同的类别。其中，数学内容类别分成了数量、不确定性和数据、变化和关系、空间和图形。^{[5] [6]} 这四个内容类别与我们传统的学校课程分类可以相对应。数量的基础是大量的数字

现象、数和测量，空间与图形的基础是几何，不确定性和数据的基础是概率与统计，变化和关系的基础是代数与函数。虽然这四个类别与传统课程可以对应，但事实上，PISA 内容分类重视数学挑战中所关注的基础现象，强调不同数学分支的相结合去阐明数学现象。在对 PISA 试题内容类别进行划分时可能会有不同的意见，一道试题可能因为有不同的方法被划分到不同的类别，这种情况是可以接受的。因为这种情况远比一道题不能被划分到任何一个类别中要好得多。在实际测试中，尽量保证每个类别的题量所占比例是一样的，所以在划分类别时会进行适当的平衡，有争议的题目通过平衡是可以确定的。真实情境类别分成了个人情境、社会情境、职业情境、科学情境。这四个类别的基本定义如下：个人情境问题聚焦于个人日常生活的各个方面，如个人的旅行、购物等；社会情境问题聚焦公民、地方、国家或全球，如国家的人口普查等；职业情境问题聚焦职场，如房屋的测量等；^[7] 科学情境问题要求学生运用数学知识解决自然世界的问题或和科学技术相关的问题。从 2012 年开始，科学情境也包括全部是数学结构的问题，即纯数学问题。但是由于数学素养是功能性作用，极少数 PISA 题目是数学内部问题。PISA 测试中要求每个类别的题量大约占 1/4。这四个类别并没有严格的定义，在 PISA 试题划分时也有着争议，但其主要目的是保证试题的平衡，所以这种争议是允许存在的。

中间的方框表明可用于解决所遇到的挑战的数学思想和行为。它们以三种方式呈现：数学内容、基本数学能力、数学过程。其中数学内容主要包括数学概念、知识和技能；基本数学能力有 8 种，构成了

数学活动；数学过程分成了三类：数学化地表述情境（表述），应用数学概念、事实、步骤和推理（应用），阐释、应用、评估数学结果（阐释）。框架中要求一半的题目属于应用类别，而表述和阐释各占 1/4。

最里面的方框表明了如何按照数学建模活动过程解决问题。从框图中看这个过程与我们平时解题时的活动是一致的，首先将情境问题表述为数学问题，需要将情境中的数学内容、关系等进行转化；然后应用数学概念、事实、步骤和推理等得到数学结果，这个过程是数学内部问题的解决；最后是对数学结果的阐释，将其转化为适合情境的结果，并评估是否适用于解释原情境问题。在 PISA 测试中，阐释和评估合并在一起了，这是因为在有特定限制的测试条件下，学生需要坐在课桌前，在短时间内解决试题，又没有额外的资源可供参考。

三、PISA 测试对数学评价的影响

中国上海在 2009 年、2012 年两次 PISA 测试中均取得了好成绩，PISA 越来越受到中国学者和广大教师的关注和重视。从 PISA 测评中我们能够看到其比较先进的测评理念，这对我国自身教育测评的发展是有大借鉴作用的。

在测评和教学过程中可以多创设真实情境的问题。我们日常教学的情境多是来自生活，但又有些脱离生活的。PISA 测试中试题几乎都是有一个真实的情境的，这种情境是来自于生活实际，也完全符合现实规律的。比如，同样是买东西的问题，我国的题目为了便于计算，题目中的数据都会有适当的修正。但 PISA 试题中的数据是来自生活实际的，这样的题目能够让学生更了解生活，有助于学生更好地理解真实情境。这种情境的题目能够让我们的学生将书本与实际生活更好地结合起来。PISA 测试对学生掌握的知识加以考查，但不限于知识本身，同时也借助题目关注学生的能力。我们在测试和教学的时候可以借鉴这一点，尽管近年来都要求培养学生的数学能力，提高学生的数学素养，但如何落实到考试评价中，是我们需要思考的问题。在平时的教学过程中对数学素养的倡导加以落实，教师在日常的教学中，可以加强对学生基本能力的训练，学生能力的提高比分数的增长更具有长远意义。分数的增长是一时的，而能力的提高则能让学生终身获益。在平时对学生进行测试的时候，教师可以参照 PISA 对数学素养测试的题目独创符合我国课标中数学素养的测试题目，从多个维度考查学生，这样既能落实教学目标，有利于教学的进行，又有利于对学生的数学素养的培养，同时也对我国自身考试体系的发展起到推进作用。

参考文献：

- [1] 张奠宙等. 数学教育学导论 [M]. 北京：高等教育出版社, 2004.
- [2] 桂德怀, 徐斌艳. 数学素养内涵之探析 [J]. 数学教育学报, 2008, 17(5): 22-24.
- [3] 王子兴. 论数学素养 [J]. 数学通报, 2002, (1).
- [4] Kaye Stacey, Ross Turner. Assessing Mathematical Literacy—The PISA Experience [M]. Springer, 2014.
- [5] <http://www.oecd.org/pisa/pisafaq/> (PISA 官网).
- [6] <http://www.cnsaes.org/homepage/html/SHPIA/>.
- [7] 陆璟. PISA 测评的理论和实践 [M]. 上海：华东师范大学出版社, 2013.

（作者单位：北京师范大学数学科学学院）

责任编辑：赵彩侠
zhaocx@zgjszz.cn