偶数 p－级数和式的改进*

蔡俊亮[1)†] **王 琦**[2)]

(1)北京师范大学数学科学学院,教育部数学与复杂系统重点实验室,100875,北京;
2)北京市第五中学,100080,北京)

摘要 近年来,关于偶数 p-级数的求和问题已有许多研究结果. 最近,作者获得了偶数 p-级数的一个求和显式,同时,也得到了其交错级数的一个求和显式. 本文对这些结果作了进一步的改进,使计算更为简单可行.

关键词 偶数 p-级数;求和显式;和式改进

中图分类号 O173.1 **DOI**:10.16360/j.cnki.jbnuns.2015.02.002

无穷级数理论是微积分学的重要组成部分,它在组合数学、近似计算等领域也起着重要的作用. 级数理论中的两大基本问题是级数的审敛与求和. 对于一般 p-级数而言,审敛问题已解决,但求和问题有待进一步研究. 这个问题一直受到人们的关注[1-4],但至今仍未全部解决.

近年来,人们试图先解决比较简单的偶数 p-级数的求和问题,并取得了一些进展[5-6]. 最近,本文第一作者获得了这个问题的最终结果,同时还得到了其交错级数的一个求和显式[7]. 为方便说明,我们先引进文献[7]中的一些记号和结果:p-级数及其交错级数分别记为

$$\sigma(p)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p},(p>1);$$

$$\tau(p)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p},(p\geqslant 1). \tag{1}$$

引理 1[7] 偶数 $p=2k$-级数及其交错级数的求和显式分别为

$$\sigma(2k)=\frac{2^{2k-1}}{4^k-2}\pi^{2k}M_k,\ \tau(2k)=\frac{1}{2}\pi^{2k}M_k, \tag{2}$$

其中 $M_0=1$,并且对于 $k\geqslant 1$,有

$$M_k=\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l},$$

$$\lambda_i=\frac{(-1)^{i+l}}{(2i+1)!} \tag{3}$$

这里的和式是对所有 k-级排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$ 而取.

利用这个引理,我们可以很方便地计算出以前人们已经得到的几个特殊的结果 $\sigma(2)$,$\sigma(4)$,$\sigma(6)$(如文献[4]和[5])以及最近在文献[7]所得的结果 $\sigma(8)$,$\sigma(10)$等:

$$\sigma(2)=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\sigma(4)=\frac{\pi^4}{90},$$

$$\sigma(6)=\frac{\pi^6}{945},$$

$$\sigma(8)=\frac{\pi^8}{9\,450},$$

$$\sigma(10)=\frac{\pi^{10}}{93\,555}. \tag{4}$$

当然,还有对应的交错级数的几个结果:

$$\tau(2)=\frac{\pi^2}{12},$$

$$\tau(4)=\frac{7\pi^4}{720},$$

$$\tau(6)=\frac{31\pi^6}{30\,240},$$

$$\tau(8)=\frac{127\pi^8}{1\,206\,900},$$

$$\tau(10)=\frac{73\pi^{10}}{6\,842\,880}. \tag{5}$$

然而,随着偶数 p 的增大,计算的难度就会越来越大. 那么如何才能使得计算比较容易呢?本文的目的是要对这些结果作进一步的改进,使计算更为简单可行.

由引理 1 不难发现,化简式(2)计算的关键问题是化简其中的 M_k 的计算. 因此,下面重点讨论一下 M_k 的化简问题.

M_k 的求和是对所有 k-级排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$ 而取,这个概念在文献[7]中有明确的定义. 为了方便计,我们再次引入并推广这个概念:

设 $(j_1j_2\cdots j_l)$ 为 l 个正整数 $j_1,j_2,\cdots,j_l$ 的一个排列,则当 $j_1+j_2+\cdots+j_l=k$ 时,称排列 $(j_1j_2\cdots j_l)$

* 国家自然科学基金资助项目(11371133);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目
† 通信作者,e-mail:caijunliang@bnu.edu.cn
收稿日期:2014-08-05

为一个 k-级 l-元排列，记为 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$. 即

$$(j_1j_2\cdots j_l)_k=(j_1j_2\cdots j_l)\big|_{j_1+j_2+\cdots+j_l=k},$$

其中 $1\leqslant l\leqslant k$. 对于任意正整数 k，记 k-级 l-元排列的集合为 $\mathrm{J}_k(l)$，其基数为 $|\mathrm{J}_k(l)|=\mathrm{C}_{k-1}^{l-1}$. 则 k-级排列的集合为

$$\mathrm{J}_k=\mathrm{J}_k(1)\cup\mathrm{J}_k(2)\cup\cdots\cup\mathrm{J}_k(k). \tag{6}$$

其基数为 $|\mathrm{J}_k|=2^{k-1}$，也就是说，M_k 的求和项数为指数级. 属于计算 NP-难题.

根据式(6)可知：对于任意排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k\in\mathrm{J}_k$，必存在 l：$1\leqslant l\leqslant k$，使得 $(j_1j_2\cdots j_l)_k\in\mathrm{J}_k(l)$. 如果 $j_1, j_2,\cdots,j_l$ 中恰有 s 个互不相同的非零数，那么称 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$ 为一个 k-级 l-元 s-阶排列，简称为 $\langle k,l,s\rangle$-排列，记为 $(j_1j_2\cdots j_l)_k^s$，其中 $1\leqslant s\leqslant l$.

再记 $\mathrm{J}_k^{\langle s\rangle}(l)=\{(j_1j_2\cdots j_l)_k^s\mid j_1,j_2,\cdots,j_l$ 恰有 s 个互不相同的非零数$\}$. 则有

$$\mathrm{J}_k(l)=\mathrm{J}_k^{\langle 1\rangle}(l)\cup\mathrm{J}_k^{\langle 2\rangle}(l)\cup\cdots\cup\mathrm{J}_k^{\langle l\rangle}(l)\quad(1\leqslant l\leqslant k). \tag{7}$$

设 $(j_1j_2\cdots j_l)_k^s$ 中的 s 个互不相同的非零数依从小到大的顺序分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_s$，其对应的重数也分别记为 $l_1,l_2,\cdots,l_s$，则这个 k-级 l-元 s-阶排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k^s$ 所对应的集合 $\{j_1,j_2,\cdots,j_l\}=\{l_1i_1,l_2i_2,\cdots,l_si_s\}$ 为一个重集，并满足 $l_1+l_2+\cdots+l_s=l$，且 $l_1i_1+l_2i_2+\cdots+l_si_s=k$，其中 $1\leqslant s\leqslant l\leqslant k$. 当然，此时 $1\leqslant l_1, l_2,\cdots,l_s\leqslant l$，$s\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{8k+1}-1)$.

显然，对于一个给定的 k-级 l-元 s-阶排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k^s$，它唯一地确定了一个有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_s,l_1,l_2,\cdots,l_s$. 我们称后者为前者的 k-级 l-元 s-谱，或简称为 $\langle k,l,s\rangle$-谱. 它主要由 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 确定，记为

$$P_k^s(j_1j_2\cdots j_l)=\langle i\rangle=\langle i_1i_2\cdots i_s\rangle=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_s\\ l_1&l_2&\cdots&l_s\end{pmatrix},\ (l)=(l_1l_2\cdots l_s). \tag{8}$$

但反之未然，即一个给定的 $\langle k,l,s\rangle$-谱可对应不同的 k-级 l-元 s-阶排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k^s$. 将 $\langle k,l,s\rangle$-谱的集合称为 $\langle k,l,s\rangle$-谱集，记为 $\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}$，即

$$\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}=\{\langle i\rangle=\langle i_1i_2\cdots i_s\rangle\mid(j_1j_2\cdots j_l)_k^s\ \text{的谱}\}. \tag{9}$$

反之，对于任意的 $\langle i\rangle\in\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}$，记 $\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}(i)=\{(j_1j_2\cdots j_l)_k^s\mid P_k^s(j_1j_2\cdots j_l)=\langle i\rangle\}$. 根据定义可知：对于任意两个不同的 $\langle i\rangle,\langle j\rangle\in\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}$，有 $\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}\cap\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}=\varnothing$. 因此，我们又可得的 $\mathrm{J}_k^{\langle s\rangle}(l)$ 的一个划分：

$$\mathrm{J}_k^{\langle s\rangle}(l)=\bigcup_{\langle i\rangle\in\mathrm{J}_k^{\langle s\rangle}(l)}\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}\langle i\rangle. \tag{10}$$

比如，$\mathrm{J}_{8,3}^{\langle 2\rangle}=\{\langle 16\rangle,\langle 23\rangle,\langle 24\rangle\}$. 而 $\mathrm{J}_{8,3}^{\langle 2\rangle}\langle 16\rangle=\{(116),(161),(611)\}$；$\mathrm{J}_{8,3}^{\langle 2\rangle}\langle 23\rangle=\{(233),(323),(332)\}$；$\mathrm{J}_{8,3}^{\langle 2\rangle}\langle 24\rangle=\{(224),(242),(422)\}$ 等.

根据以上分析，我们可得下面的结论.

定理1 由式(3)所确定的和式 M_k 具有下面的谱和形式：

$$M_k=\sum_{1\leqslant s\leqslant l\leqslant k}\sum_{\langle i\rangle\in\mathrm{J}_{k,l}^{\langle s\rangle}}\frac{l!}{\boldsymbol{l}!}\prod_{r=1}^{s}\lambda_{i_r}^{l_r}, \tag{11}$$

其中 λ_i 由式(3)确定，$\boldsymbol{l}!=l_1!l_2!\cdots l_s!$,

$$s\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{8k+1}-1).$$

证 因为对于任意的 $(j_1j_2\cdots j_l)_k\in\mathrm{J}_k$，必然存在 l,s：$1\leqslant s\leqslant l\leqslant k$，使得

$$(j_1j_2\cdots j_l)_k=(j_1j_2\cdots j_l)_k^s\in\mathrm{J}_k^{\langle s\rangle}(l).$$

所以

$$M_k=\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k\in\mathrm{J}_k}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}=\sum_{l=1}^{k}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k\in\mathrm{J}_k(l)}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}=\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k\in\mathrm{J}_k^{\langle s\rangle}(l)}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}.$$

又因上式最后的和式是对全部排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k\in\mathrm{J}_k^{\langle s\rangle}(l)$ 而取，设此排列的谱为 $\langle i\rangle=\langle i_1i_2\cdots i_s\rangle\in\mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}$，则谱 $\langle i\rangle$ 所对应的排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$ 的数目恰为重集 $\{j_1,j_2,\cdots,j_l\}=\{l_1i_1, l_2i_2,\cdots,l_si_s\}$ 的 l-排列数，即

$$\binom{l}{l_1,l_2,\cdots,l_s}=\frac{l!}{l_1!l_2!\cdots l_s!}=\frac{l!}{\boldsymbol{l}!}.$$

而此时，$\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}=\lambda_{i_1}^{l_1}\lambda_{i_2}^{l_2}\cdots\lambda_{i_s}^{l_s}$.

推论1 偶数 $p=2k$-级数的求和显式为

$$\sigma(2k)=\frac{2^{2k-1}}{4^k-2}\pi^{2k}\sum_{1\leqslant s\leqslant l\leqslant k}\sum_{\langle i\rangle\in\mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}}\frac{l!}{\boldsymbol{l}!}\prod_{r=1}^{s}\lambda_{i_r}^{l_r}, \tag{12}$$

其中 λ_i 由式(3)确定，$\boldsymbol{l}!=l_1!l_2!\cdots l_s!$.

证 根据引理1和定理2直接可得结论.

推论2 偶数 $p=2k$-交错级数的求和显式为

$$\tau(2k)=\frac{1}{2}\pi^{2k}\sum_{1\leqslant s\leqslant l\leqslant k}\sum_{\langle i\rangle\in\mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}}\frac{l!}{\boldsymbol{l}!}\prod_{r=1}^{s}\lambda_{i_r}^{l_r}, \tag{13}$$

其中 λ_i 由式(3)确定，$\boldsymbol{l}!=l_1!l_2!\cdots l_s!$.

证 根据引理1和定理1直接可得结论.

由此可见，引理1和定理1中的 M_k 的求和项数分别为

$$s_k=\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\sum_{\langle i\rangle\in\mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}}\frac{l!}{\boldsymbol{l}!}=2^{k-1},$$

$$p_k=\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}|\mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}|, \tag{14}$$

其中

$$\mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}=\{\langle i\rangle:\sum_{r=1}^{x}i_rl_r=k,\ \sum_{r=1}^{s}l_r=l,\ 1\leqslant i_r<i_{r+1}\leqslant k,\ 1\leqslant l_r\leqslant l\},$$

并且 $1\leqslant s\leqslant l\leqslant k$. 显然, $s_k\geqslant p_k$. 由于

$$\sum_{l=1}^{k}\mid \mathrm{P}_{k,l}^{\langle 1\rangle}\mid=\mid\{\langle k/l\rangle:l\mid k\}\mid,$$

所以

$$p_k=\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\mid \mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}\mid=$$

$$\sum_{l=1}^{k}\mid \mathrm{P}_{k,l}^{\langle 1\rangle}\mid+\sum_{l=2}^{k}\sum_{s=2}^{l}\mid \mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}\mid=$$

$$\mid\{\langle k/l\rangle:l\mid k\}\mid+\sum_{l=2}^{k-1}\sum_{s=2}^{l}\mid \mathrm{P}_{k,l}^{\langle s\rangle}\mid. \qquad (15)$$

利用式(15)计算可得:

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_3=3,\ p_4=5,$$
$$p_5=7,\ p_6=11,\ p_7=15,\ p_8=22.$$

利用定理 1 的式(11)计算 M_6, M_7 和 M_8, 从而再用推论 1 和推论 2 计算出 $\sigma(12)$, $\sigma(14)$ 和 $\sigma(16)$ 以及 $\tau(12)$, $\tau(14)$ 和 $\tau(16)$. 为简单计,举例说明.

例 1 计算 $\sigma(12)$ 和 $\tau(12)$ 之值,并比较 s_6 和 p_6 的大小.

解 M_6 的计算结果:($s_6=2^5=32>11=p_6$).

l	s	$k=j_1+j_2+\cdots+j_l=6$	$\langle i\rangle$	(l)	$\frac{l\,!}{\boldsymbol{l}\,!}\prod_{r=1}^{s}\lambda_{i_r}^{l_r}$
1	1	6	⟨6⟩	(1)	λ_6
	1	3+3	⟨3⟩	(2)	λ_3^2
2	2	2+4	⟨24⟩	(11)	$2\lambda_2\lambda_4$
	2	1+5	⟨15⟩	(11)	$2\lambda_1\lambda_5$
	1	2+2+2	⟨2⟩	(3)	λ_2^3
3	2	1+1+4	⟨14⟩	(21)	$3\lambda_1^2\lambda_4$
	3	1+2+3	⟨123⟩	(111)	$6\lambda_1\lambda_2\lambda_3$
4	2	1+1+2+2	⟨12⟩	(22)	$6\lambda_1^2\lambda_2^2$
	2	1+1+1+3	⟨13⟩	(31)	$4\lambda_1^3\lambda_3$
5	2	1+1+1+1+2	⟨12⟩	(41)	$5\lambda_1^4\lambda_2$
6	1	1+1+1+1+1+1	⟨1⟩	(6)	λ_1^6

$$M_6=\lambda_6+\lambda_3^2+2\lambda_2\lambda_4+2\lambda_1\lambda_5+\lambda_2^3+3\lambda_1^2\lambda_4+6\lambda_1\lambda_2\lambda_3+$$
$$6\lambda_1^2\lambda_2^2+4\lambda_1^3\lambda_3+5\lambda_1^4\lambda_2+\lambda_1^6=-\frac{1}{13\,!}+\frac{2}{3\,!\,11\,!}+$$
$$\frac{2}{5\,!\,9\,!}-\frac{3}{3\,!^2 9\,!}+\frac{1}{7\,!^2}-\frac{6}{3\,!\,5\,!\,7\,!}+\frac{4}{7\,!\,3\,!^3}-$$
$$\frac{1}{5\,!^3}+\frac{6}{6\,!^2}-\frac{5}{5\,!\,3\,!^4}+\frac{1}{3\,!^6}=\frac{2047\times 691}{2^{10}3^6 5^3 7^2\times 143}.$$

$$\sigma(12)=\frac{691\pi^{12}}{3^6 5^3 7^2\times 143}=\frac{691\pi^{12}}{638\ 512\ 875},$$

$$\tau(12)=\frac{1\ 414\ 477\pi^{12}}{1\ 307\ 674\ 368\ 000}. \qquad (16)$$

例 2 计算 $\sigma(14)$ 和 $\tau(14)$ 之值,并比较 s_7 和 p_7 的大小.

解 M_7 的计算结果:($s_7=2^6=64>15=p_7$).

l	s	$k=j_1+j_2+\cdots+j_l=7$	$\langle i\rangle$	(l)	$\frac{l\,!}{\boldsymbol{l}\,!}\prod_{r=1}^{s}\lambda_{i_r}^{l_r}$
1	1	7	⟨7⟩	(1)	λ_7
	2	3+4	⟨34⟩	(11)	$2\lambda_3\lambda_4$
2	2	2+5	⟨25⟩	(11)	$2\lambda_2\lambda_5$
	2	1+6	⟨16⟩	(11)	$2\lambda_1\lambda_6$
	2	2+2+3	⟨23⟩	(21)	$3\lambda_2^2\lambda_3$
3	2	1+3+3	⟨13⟩	(12)	$3\lambda_1\lambda_3^2$
	2	1+1+5	⟨15⟩	(21)	$3\lambda_1^2\lambda_5$
	3	1+2+4	⟨124⟩	(111)	$6\lambda_1\lambda_2\lambda_4$
	2	1+2+2+2	⟨12⟩)	(13)	$4\lambda_1\lambda_2^3$
4	2	1+1+1+4	⟨14⟩	(31)	$4\lambda_1^3\lambda_4$
	3	1+1+2+3	⟨123⟩	(211)	$12\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3$
5	2	1+1+1+2+2	⟨12⟩	(32)	$10\lambda_1^3\lambda_2^2$
	2	1+1+1+1+3	⟨13⟩	(41)	$5\lambda_1^4\lambda_3$
6	2	1+1+1+1+1+2	⟨12⟩	(51)	$6\lambda_1^5\lambda_2$
7	1	1+1+1+1+1+1+1	⟨1⟩	(7)	λ_1^7

$$M_7=\lambda_7+2\lambda_3\lambda_4+2\lambda_2\lambda_5+2\lambda_1\lambda_6+3\lambda_2^2\lambda_3+3\lambda_1\lambda_3^2+$$
$$3\lambda_1^2\lambda_5+6\lambda_1\lambda_2\lambda_4+4\lambda_1\lambda_2^3+4\lambda_1^3\lambda_4+12\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3+$$
$$10\lambda_1^3\lambda_2^2+5\lambda_1^4\lambda_3+6\lambda_1^5\lambda_2+\lambda_1^7=\frac{1}{15\,!}-\frac{2}{7\,!\,9\,!}-$$
$$\frac{2}{5\,!\,11\,!}-\frac{2}{3\,!\,13\,!}+\frac{3}{5\,!^2 7\,!}+\frac{3}{3\,!\,7\,!^2}+\frac{3}{3\,!^2 11\,!}+$$
$$\frac{6}{3\,!\,5\,!\,9\,!}-\frac{4}{3\,!\,5\,!^3}-\frac{4}{3\,!^3 9\,!}-\frac{12}{3\,!^2 5\,!\,7\,!}+$$
$$\frac{10}{3\,!^3 5\,!^2}+\frac{5}{3\,!^4 7\,!}-\frac{6}{5\,!\,6^5}+\frac{1}{6^7}=\frac{35\times 8191}{15\,!}.$$

$$\sigma(14)=\frac{2\pi^{14}}{18\ 243\ 225},$$

$$\tau(14)=\frac{8\ 191\pi^{14}}{74\ 724\ 249\ 600}. \qquad (17)$$

例 3 计算 $\sigma(16)$ 和 $\tau(16)$ 之值,并比较 s_8 和 p_8 的大小.

解 M_8 的计算结果:($s_8=2^7=128>22=p_8$).

$$M_8=2\lambda_1\lambda_7+\lambda_8+\lambda_4^2+\lambda_1{}^8+6\lambda_1\lambda_3\lambda_4+2\lambda_2\lambda_6+2\lambda_3\lambda_5+$$
$$3\lambda_1^2\lambda_6+3\lambda_2^2\lambda_4+3\lambda_2\lambda_3^2+6\lambda_1\lambda_2\lambda_5+\lambda_2^4+4\lambda_1^3\lambda_5+$$
$$6\lambda_1^2\lambda_3^2+12\lambda_1^2\lambda_2\lambda_4+12\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3+5\lambda_1^4\lambda_4+10\lambda_1^2\lambda_2^3+$$
$$20\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3+6\lambda_1^5\lambda_3+15\lambda_1^4\lambda_2^2+7\lambda_1^6\lambda_2=$$
$$(\frac{2}{3\,!\,15\,!}-\frac{1}{17\,!})+(\frac{1}{9\,!^2}+\frac{1}{6^8}-$$
$$\frac{6}{3\,!\,7\,!\,9\,!})+\frac{2}{5\,!\,13\,!}+\frac{2}{7\,!\,11\,!}-\frac{3}{13\,!\,6^2}-$$
$$\frac{3}{5\,!^2 9\,!}-\frac{3}{5\,!\,7\,!^2}-\frac{6}{3\,!\,5\,!\,11\,!}+\frac{1}{5\,!^4}+$$
$$\frac{4}{11\,!\,6^3}+\frac{6}{7\,!^2 6^2}+\frac{12}{5\,!\,9\,!\,6^2}+\frac{12}{5\,!^2 7\,!\,6}-$$
$$\frac{5}{9\,!\,6^4}-\frac{10}{5\,!^3 6^2}-\frac{20}{5\,!\,7\,!\,6^3}+$$
$$\frac{6}{7\,!\,6^5}+\frac{15}{5\,!^2 6^4}-\frac{7}{5\,!\,6^6}=\frac{107\ 451\ 409}{17\,!\,15}.$$

l	s	$k=j_1+j_2+\cdots+j_l=8$	$\langle i\rangle$	(l)	$\frac{l!}{\boldsymbol{l}!}\prod_{r=1}^{s}\lambda_{i_r}^{l_r}$
1	1	8	〈8〉	(1)	λ_8
	1	4+4	〈4〉	(2)	λ_4^2
	2	1+7	〈17〉	(11)	$2\lambda_1\lambda_7$
2	2	2+6	〈26〉	(11)	$2\lambda_2\lambda_6$
	2	3+5	〈35〉	(11)	$2\lambda_3\lambda_5$
	2	1+1+6	〈16〉	(21)	$3\lambda_1^2\lambda_6$
	2	2+2+4	〈24〉	(21)	$3\lambda_2^2\lambda_4$
3	2	2+3+3	〈23〉	(12)	$3\lambda_2\lambda_3^2$
	3	1+2+5	〈125〉	(111)	$6\lambda_1\lambda_2\lambda_5$
	3	1+3+4	〈134〉	(111)	$6\lambda_1\lambda_3\lambda_4$
	1	2+2+2+2	〈2〉	(4)	λ_2^4
	2	1+1+1+5	〈15〉	(31)	$4\lambda_1^3\lambda_5$
4	2	1+1+3+3	〈13〉	(22)	$6\lambda_1^2\lambda_3^2$
	3	1+1+2+4	〈124〉	(211)	$12\lambda_1^2\lambda_2\lambda_4$
	3	1+2+2+3	〈123〉	(121)	$12\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3$
	2	1+1+1+1+4	〈14〉	(41)	$5\lambda_1^4\lambda_4$
5	2	1+1+2+2+2	〈12〉	(23)	$10\lambda_1^2\lambda_2^3$
	3	1+1+1+2+3	〈123〉	(311)	$20\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3$
6	2	1+1+1+1+1+3	〈13〉	(51)	$6\lambda_1^5\lambda_3$
	2	1+1+1+1+2+2	〈12〉	(42)	$15\lambda_1^4\lambda_2^2$
7	2	1+1+1+1+1+1+2	〈12〉	(61)	$7\lambda_1^6\lambda_2$
8	1	1+1+1+1+1+1+1+1	〈1〉	(8)	λ_1^8

$$\sigma(16)=\frac{8\,265\,493\pi^{16}}{47\,879\,538\,723\,843\,750},$$

$$\tau(16)=\frac{107\,451\,409\pi^{16}}{10\,670\,622\,842\,880\,000}. \tag{18}$$

参考文献

[1] 华罗庚．高等数学引论[M]．北京：高等教育出版社，2010

[2] 同济大学数学教研室．高等数学(第 5 版)[M]．北京：高等教育出版社，2005

[3] 邝荣雨．微积分学讲义[M]．北京：北京师范大学出版社，2006

[4] 蔡俊亮．高等数学 B[M]．北京：北京师范大学出版社，2009

[5] 赵天玉．p-级数求和的留数方法[J]．太原师范学院学报(自然科学版)，2005(2)：8

[6] 刘凤林．p-级数的两个求和公式[J]．天津科技大学学报，2005(4)：65

[7] 蔡俊亮．关于偶数 p-级数的求和显式[J]．北京师范大学学报(自然科学版)，2013，49(6)：557

Improve summation of even p-series

CAI Junliang[1)]　WNAG Qi[2)]

(1)School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China;
2)Beijing No. 5 High School, 100080, Beijing, China)

Abstract　Recent years have witnessed many new findings regarding the sum of even p-series. The author has recently obtained an explicit of a summation of even p-series. An explicit of a summation of the interlace series was also obtained. Further improvements have been made over the above results, making it much simpler and more workable.

Keywords　p-series; summation; explicit; recursion