

攀登数学教育研究高峰

——第39届国际数学教育心理学大会综述

董连春¹, 曹一鸣²

(1. 墨尔本大学 教育研究生院, 澳大利亚 墨尔本 VIC3010; 2. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875)

摘要: 第39届国际数学教育心理学大会于2015年7月13—18日在澳大利亚塔斯马尼亚州霍巴特市召开。大会主题是“攀登高峰, 架设桥梁”。为方便国内数学教育工作者了解此次会议的核心内容, 对第39届国际数学教育心理学大会的主题报告和研究型论文报告进行综述和分析, 以期国内读者能够掌握数学教育研究领域的国际最新动态。

关键词: 数学教育; 国际数学教育心理学大会; PME

中图分类号: G40-059.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894(2016)02-0001-10

1 国际数学教育心理学大会简介

国际数学教育心理学大会的主办方为国际数学教育心理学研究会(The International Group for the Psychology of Mathematics Education)。该研究会是数学教学国际委员会(International Commission for Mathematical Instruction, ICMI)的分支机构, 于1976年在第三届国际数学教育大会上正式成立。会议宗旨包括3个方面, 促进数学教育研究领域的国际联系与信息交流, 促进跨学科交流与研究, 以及加深对心理学以及数学教学与学习的准确理解。国际数学教育心理学大会每年举办一次, 首届会议于1977年在荷兰乌特勒支举办。虽然国际数学教育心理学大会冠以“心理学”的标志, 但大会的具体内容却并不局限于此, 而是包含数学教育领域的各个研究分支。

第39届国际数学教育心理学大会(以下简称PME 39)于2015年7月13—18日在澳大利亚塔斯马尼亚州霍巴特市召开。大会主题是“攀登高峰, 架设桥梁”。会议形式包括大会主题报告, 研究论坛, 研究型论文报告, 论文海报展示, 简短型报告, 讨论组, 工作坊等。由于大会主题报告和研究型论文报告构成会议主体, 这里主要对以上两个部分进行综述。此次大会共有4个大会主题报告。对于研究型论文报告, 大会收到的研究型报告总计213篇, 经过同行评议之后, 最终接收132篇。

2 研究主题综述

2.1 在职数学教师职业发展

教育研究人员与在职教师之间如何进行交流与合作, 进而提高数学教师的教学水平, 一直以来是数学教育研究领域的一大难题。美国北卡罗来纳州立大学的Cyndi Edgington研究团队^[1]认为, 需要在教育研究人员与在职教师这两个群体之间找到切实可行的切合点, 这对于教师职业发展项目来说非常重要。Cyndi Edgington研究团队指出, 学习轨道(Learning Trajectories, LTs)可以作为切合点之一。学习轨道是一种研究导向的理论, 描述学生的思考如何随时间变化,

如何从非正式的表层概念逐渐转变成复杂的理解。在Cyndi Edgington研究团队的研究项目中, 教师与教育研究人员共同参与到教师专业发展项目中, 致力于“基于学习轨道的教学模式”(Learning Trajectory Based Instruction)。学习轨道的信息主要体现在学生的笔记、作业, 以及学生的访谈视频。在该研究项目中, 教师与教育研究人员以学习轨道为切合点, 讨论和交流学生的学习轨道。研究发现, 该切合点有效地促进两个群体进行互相交流, 因此这样的模式, 能够加强两个群体之间的有效交流, 进而有效地促进教师对学习通道的理解, 能够更加准确全面地了解学生的学习过程。

数学教师职业发展中, 对于教学领导力的研究已经成为热点问题。教学领导力人才的培养, 不仅仅涉及到教学能力的提高, 更重要的是教学领导力的提高。日本上越教育大学(Joetsu University of Education) Hiroshi Iwasaki研究团队^[2], 展示了日本近年来在教学领导力培养方面的改革情况。在日本, 中学教师在积累了一定的教学经验之后, 可以去大学进行脱产培训, 培训时间为1—2年。但是这种培训的一大诟病是过于注重理论, 而与实践脱节比较大。因此, 近年来日本进行了一定的改革, 在教师入职以后的脱产培训项目中, 引入教学实践的环节。实践环节包括观摩其他老师的课, 以及自己亲自授课。实践环节中, 教师都会有日志记录。Hiroshi Iwasaki研究团队的研究项目中, 将教师日志中的“描述”分为4类, Empirical discourse 简单描述课堂中的活动, 没有使用职业或者专业术语; Practical discourse 使用教学常用的术语进行描述; Quasi-theoretical discourse 简单使用教育理论术语对某些课堂活动进行描述; Theoretical discourse 灵活娴熟地使用教育理论术语对课堂活动进行描述。通过上述分类方法, 该研究主要分析, 在培训项目的实践环节中, 教师的知识水平和教学领导力水平的变化和提高。

数学在职教师职业发展的另一个核心问题是, 如何设计高效的在职教师职业发展项目, 进而更好地促进教学。瑞典林纳大学(Linnaeus University)学者Olteanu Constanta的研究^[3]指出, 为了切实帮助教师提高教学能力与水平, 教师职业发展项目需要包含3点要素: (1) 项目中包含对数学知识

收稿日期: 2016-04-10

基金项目: 国家留学基金委“国家建设高水平大学公派研究生项目”资助

作者简介: 董连春(1986—), 男, 河北沧州人, 澳大利亚墨尔本大学教育研究生院在读博士研究生, 主要从事数学教育研究。

和教育学知识的学习,也需要包含教师之间的讨论与交流,从而使得教师对所学习的知识有更深入地理解;(2)给予教师足够的时间在彼此之间进行互相合作;(3)给予每个教师足够的机会,使其对自身的教学方式评价。这样,教师职业发展项目就不会与教师的日常工作割裂开,而是形成更加紧密的整体。

在职教师培训过程中,教师注意能力(Teacher Noticing)的培养,近年来得到越来越多学者的关注。教师注意能力,主要是指教师发现和识别课堂教学中一些关键事件、学生思维活动的情况以及学生学习误区的能力。该能力体现了教师对课堂中教学与学习情况的掌控情况,因此教师注意能力对教学的有效性有很重要的影响。新加坡教育部 Cynthia Seto 及其同事^[4],对职业初期的数学教师的注意能力进行了研究。对于职业初期的数学教师而言,教师注意能力这方面,往往有很大欠缺。所以当新老师在观摩一个优秀教师的课堂教学时,很容易忽略教学过程中的关键事件,以及学生的思维状况。这种能力的培养,不仅仅需要教师个人教学经验的积累,同时更加需要和专家型教师进行系统地交流与学习。其中系统性非常重要,并不是零散地学习与交流,而是有一个完善的框架。Cynthia Seto 及其同事在其研究中,提出了一个系统性的学习流程。该流程主要形式为师徒一对一结对(One-on-One Mentoring)辅导,分为3个环节,课前讨论,课堂教学观察,课后讨论。每个环节都会系统地研究课堂教学中需要特别关注哪些教学事件,哪些学生行为与活动等。

2.2 职前数学教师培养

师范生培养过程中,引入虚拟课堂情境作为一种工具,已经不是新兴事物。但是,真实的课堂往往涉及到非常复杂的教学情境与多样化的学生思维状况。因此,如何在虚拟课堂环境中尽可能地还原真实的课堂状况,切实有效地帮助师范生提升 PCK,一直是一个难题。澳大利亚墨尔本大学 Lynda Ball 及其研究团队^[5],开发了一种新型的虚拟课堂情境工具(Proof-of-Concept Virtual Learning Environment)并分析了该工具的教学性与实用性。在教学性方面,该工具可以帮助师范生审视和理解学生的思维状况,同时该工具中可以设置丰富的学习任务或问题,用以诊断和探究学生的思维状况,为师范生提供教学范例,帮助师范生进行教学反思。在实用性方面,师范生可以自主控制学习进程,在时间安排上具有很强的灵活性。

对于师范生教育来说,研究并揭示师范生的成长过程以及思维变化过程,具有十分重要的意义。西班牙阿利坎特大学(University of Alicante) Ceneida Fernández 研究团队^[6]指出,师范生在学习的过程中,对课堂教学与学生数学学习的认识过程并不是均衡的,而是存在着一些比较关键性的节点。因此,识别出这些节点,对师范生的培养来说,至关重要。关键发展性理解(A Key Developmental Understanding, KDU)是一种教育理论,用以刻画学生的认知发展过程,同时该理论也为师范生培养提供了一个平台,帮助师范生了解学生的认知发展过程中的关键节点,进而帮助师范生更深刻地理解学生的认知发展过程。Ceneida Fernández 研究团队

的研究项目,将 KDU 理论与师范生培养结合起来。借助该理论,该研究以“对学生数学思维”的认识与理解”为例,着重分析了师范生在学习过程中的转变,探究了师范生如何逐渐修正自己的认识,从而最终更加全面地认识和理解了“学生数学思维”。

如何设计师范生课程,才能有效地提升师范生如何提升师范生的教学内容知识(Pedagogical Content Knowledge, PCK)与学科知识(Subject Matter Knowledge, SMK),以及如何更好地将两者衔接起来,一直是师范生教育的研究热点。宾夕法尼亚米勒斯威尔大学(Millersville University of Pennsylvania) Cynthia E. Taylor 及其同事^[7],对师范生课程的设计者进行了访谈,并分析了师范生课程的设计中所呈现出来的教学目标。该研究中对“师范生课程的设计者”的选取有特殊的要求:拥有硕士学位,拥有至少20年的中小学教学经验,长期参与师范生培养与在职教师培训等工作。通过对这些课程设计者进行访谈,发现师范生课程的设计中,呈现出15种教学目标,其中8种涉及到PCK,另外7种涉及到SMK。具体目标如下。

表1 教学目标分类

PCK	SMK
熟悉数学教学中的基本教学策略	理解数学概念,数学公式背后的来龙去脉
熟悉与数学课程和教学相关的政策文件	采用多种方法解决数学问题
熟悉学生数学学习状况	通过操作性体验(比如各种教具和学具),加深对数学概念性理解积累
亲身体会数学成功	加深对整个数学体系的理解
调整和完善师范生对数学学习的认识	体验数学学习的多样性
调整和完善师范生对数学教学的认识	了解中小学阶段的数学学习范围
体验数学的趣味性	提高运用语言进行数学解释的能力
能够投入到合作教学与合作学习中	

2.3 课堂教学研究(师生交流等)

数学课堂中师生交流,一直是课堂研究中的热点问题。以往的研究往往指出,IRF(Initiation-Response-Follow-up)模式是一种低效的交流方式,而且课堂提问中应当尽量避免这种交流方式。但是,澳大利亚墨尔本大学董连春等研究者^[8],认为IRF模式下也可以产生高效的课堂交流,关键在于教师的教学能力和课堂提问水平。该研究在以往研究的基础上,提出了一种新的研究思路,帮助教师和研究者分析数学课堂中的师生交流。该研究收集了中国和澳大利亚两国数学课堂教学录像,以教师提问(Teacher Questioning)为突破点,借助于IRF模式,开发了一套新的课堂编码体系,用以分析教师提问的过程。该编码体系既涵盖了教师提问的序列,又涵盖了教师提问的具体问题类别,能够帮助数学教师和教育研究人员分析和反思数学课堂交流情况。

在数学课堂教学中,教师如何引导学生对所学知识展开课堂讨论,一直是一个众所关注的问题。由于课堂讨论涉及到很多的因素,保障课堂讨论的有效性一直是个很难解决的问题。西班牙巴塞罗那自治大学(Universitat Autònoma de Barcelona) Miquel Ferrer 及其合作者^[9],以图形的相似性为

例,分析和研究教师如何组织有效的课堂讨论,同时研究课堂讨论能否帮助学生提高解题正确率.该研究通过两个方面来探讨课堂讨论中的“学习机会”(Opportunity to Learn):一方面是教学资源(包括教学任务及多媒体工具)的准备,另一方面是教学策略的使用,尤其是课堂中语言和沟通策略的使用.研究发现,以下几点能够为学生创造更多学习机会:(1)开放性并具有挑战性的学习任务更能激发学生产生不同的想法,从而使学生投入到课堂讨论;(2)使用ICT工具(比如GeoGebra),能够协助师生对不同的想法进行进一步的验证和探求,从而促进课堂讨论的进一步深入;(3)要求学生对自己的想法进行解释并提供理由;(4)对学生的回答进行进一步的追问.

数学论证与证明方面的能力是数学素养中的核心要素.德国慕尼黑大学Daniel Sommerhoff及其同事^[10]认为,学生在数学论证与证明的能力,取决于6个方面的知识水平:方法论知识水平(如何判断数学证明的有效性),数学基础水平(数学概念性知识与程序性知识),数学解题策略水平(数学知识的灵活运用),问题解决技能水平(对问题的分析和处理能力),数学认知水平(对数学及其本质的认识),情感态度水平(对数学的兴趣与动机).该研究以“6种知识水平”为分析框架,整理分析了2010—2014年PME会议上的782篇研究型论文报告,结果发现,以往研究中,数学论证与证明过程中可能出现的认知活动包括,识别问题,提出问题,提出假设,构造与设计辅助性实物,给出证据,评估证据的有效性,得出结论,交流与分享;数学论证与证明的教学目标包括论证与证明的构造,论证与证明的阅读和理解,论证与证明的展示.同时,大多数研究都只涉及了单一方面的知识水平和认知活动,因此数学教育研究者需要更多的研究,对以上不同的知识水平和认知活动进行更深层次的整合.

课堂教学的目标是让学生在已有知识经验的基础之上,对新知识形成概念性理解.然而,帮助学生建立连贯完整的数学知识体系,无疑是数学课堂教学的重点与难点.日本冈山大学(Ookayama University)Masakazu Okazaki及其同事^[11]分析讨论了,如何设计教学活动,进而保证数学课堂的连贯性.通过比较新手教师与熟手教师的课堂教学,该研究得出,连贯性课堂的3个特点:(1)新旧知识建立关联.在分析课堂任务时,教师注重激发学生思考当前任务与以往知识的联系,使学生能够与以往知识建立关联.(2)充分的课堂讨论与交流.教师会运用多种方式,引导课堂讨论,使全班有机会充分讨论和分析核心教学知识.(3)充分利用学生的已有知识经验.

美国纽约大学研究者Martin A. Simon^[12],做了大会主题报告,提出并阐述了Learning through Activity这一学习模式和基于此的教学模式.Learning through Activity模式的基本前提:有效的数学教学的基础在于,教师对学生数学概念建构过程的准确理解.为了更好准确地刻画数学学习中概念性理解(Conceptual Understanding),Martin A. Simon对比分析了两种不同的学习过程,一种是反思性的抽象过程(Reflective Abstraction),另一种是经验性的学习过程

(Empirical Learning Process).在经验性的学习过程中,学生观察到了一些结果,比如两个奇数相乘,结果仍然为奇数,但是学生并不知道这个结果背后的逻辑必然性.而数学结论背后的逻辑必然性才是概念性理解的核心要素.学生只有经历了反思性的抽象过程,才能理解数学结论的逻辑必然性,因而才能对数学知识形成概念性理解.

在此基础上,Martin A. Simon提出LTA教学模式(Learning through Activity Instructional Approach),这有区别于皮亚杰的“认知发展是平衡与再平衡的过程”.根据皮亚杰的认知发展理论,教学中应当设置充满智慧刺激的环境,让儿童自行探索.但是,LTA教学模式则采取更为直接的方式,帮助学生经历反思性的抽象思维过程,进而形成数学知识的概念性理解.同时,LTA教学模式也有别于“问题解决型”(Problem-Solving Approach)的教学模式.“问题解决型”课堂教学模式,往往被认为能够有效促进学生形成概念性理解,但其弊端是,在课堂中,并不是每个学生都能在问题解决中有质的飞跃.实际的情形往往是,学习能力强的学生完成问题解决,然后将想法向其他学生汇报,而数学能力差的学生,则只能倾听汇报,而不能在问题解决中有质的飞跃,因此所形成的概念性理解并不牢固.为了弥补问题解决型的课堂教学模式的弊端,教师可以在LTA教学模式中设计一系列的学习任务,让学生有更多的机会经历反思性的抽象思维过程.

2.4 教师知识

加拿大卡尔加里大学(The University of Calgary)学者Olive Chapman^[13]探讨了教师自我反思意识与教师知识之间的联系.Olive Chapman指出,教师的思维方式,决定着教师能否习得相应的数学教学知识.这些思维方式中,除了数学思维以外,比较核心的部分包括问题解决型思维和探究型思维,等等.而这些思维的核心,就是教师的自我反思意识.因此,Olive Chapman认为在教师知识的获得和提升过程中,自我反思意识起到至关重要的作用.该研究指出,自我反思是一切学习的基础,教师的学习过程也不例外.教师自我反思的开始,都是因为教学中出现了问题,出现了疑惑,然后教师就开始自我反思并进行一系列的探究,然后疑惑得到解答,这样自我反思就告一段落.自我反思同时又作为教师知识的一部分,如果教师具备了自我反思方面的知识,就会对课堂中的教学与学习行为有极大的好奇心,进而会自我提出问题,促使自己进一步采取探究行为,了解学生的想法,从而对教学与学习有更深入的理解.这样,教师知识就会得到进一步的提升.

澳大利亚南昆士兰大学(University of Southern Queensland)学者Seyum Tekeher Getenet及其同事^[14]探讨分析了数学教育情境下的教师TPACK(Technological Pedagogical Content Knowledge)知识,如图1所示.

该研究指出,在数学教学领域,内容知识(Content Knowledge,CK)被重新定义为专门的数学知识(Specialised Mathematics Knowledge,SMK),是指数学教师在教学中所需要的数学专业方面的知识.教学知识(Pedagogical Knowledge,PK)被重新定义为专门的教学知识(Specialised

Pedagogical Knowledge, SPK), 包括关于数学教学策略的知识, 关于学生如何学习数学的知识, 以及关于数学课程的知识. 技术知识 (Technological Knowledge) 指教师在教学中使用某种信息技术时所需要具备的知识, 包括教学软件的使用等. Specialised Pedagogical Mathematics Knowledge (SPMK) 是 SPK 与 SMK 的公共部分, 是指数学教学中所需要的数学知识和教育学知识. Specialised Technological Mathematics Knowledge (STMK) 是 TK 与 SMK 的公共部分, 是指数学教学中讲授不同的数学内容时, 能够合理选取与使用恰当的软件或者多媒体工具方面的知识. Specialised Technological Pedagogical Knowledge (STPK) 是 TK 与 SPK 的公共部分, 是指数学教学中使用不同的教学方式、不同层次的学生与不同难度的教材时, 能够合理选取与使用恰当的软件或者多媒体工具方面的知识. Specialised Technological and Mathematics Pedagogical Knowledge (STAMPK) 是 STMK, STPK, SPMK 三者的公共部分. 在数学教学中, 如果希望有效灵活地使用信息技术作为辅助, 那么教师就必须具备以上几个方面的知识.

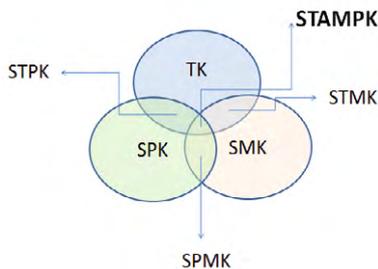


图 1 数学教育情境下的教师 TPACK

德国莱布尼兹数学与科学教育学院 (Leibniz Institute for Science and Mathematics Education) 学者 Carolin Loch^[15], 提出了教师知识的一个新的维度, 与学校教学相关的内容知识 (School-Related Content Knowledge, SRCK). Carolin Loch 认为, 在 CK 和 PCK 的基础上, 有必要引入 SRCK, 从而使得教师知识的理论框架更加完善. 通常意义上的 CK 包含的数学内容, 往往是指严格意义上的数学内容及其知识体系. 这些内容, 无论在复杂程度上, 还是在严格程度上, 往往是高于学校数学知识的. 因此, CK 和 PCK 实质上都不涵盖课程方面的知识 (比如, 中小学数学学习内容及其与课程标准的一致性等). 然而, 现代数学知识体系与中小学数学学习内容之间的关联, 对于教师而言显然很重要. 因为一方面, 教师需要知道, 中小学的数学内容在严格数学知识体系中的来龙去脉; 另一方面, 教师也需要知道, 如何调整和使用严格数学知识体系中的内容, 以适应中小学数学教学的需求. 例如, 对于无限循环小数 $0.9\cdots=1$ 而言, 严格的逻辑证明需要涉及到高等数学中的极限知识; 构建实数体系的方法是使用柯西序列, 或者狄德金分割. 但这些显然不适用与中小学数学教学, 然而柯西序列可以用于估计无理数 (比如说 $\sqrt{2}$) 的大小. 对于上述知识而言, 无论 CK, 还是 PCK 都没有涵盖这部分内容. SRCK 知识可以看作是将在中小学数学教学过程中进行特殊应用的一种知识, 非常有必要列入教师知识的范畴.

德国汉堡大学 (University of Hamburg) 学者 Thorsten Scheiner^[16]对教师知识的建构问题进行了研究和分析. 该研究主要阐述, 教师的各类知识是如何组织联系在一起. 该研究以原子结构为模型建立教师知识体系, 引入了“知识原子 (Knowledge Atom)”的理论框架. 如图 2 所示.

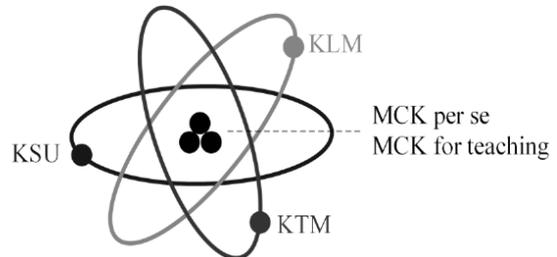


图 2 “知识原子 (Knowledge Atom)”理论框架

该结构包括以下几个方面: (1) 关于学生数学思考与理解的知识 (Knowledge of Students' Mathematical Thinking and Understanding, KSU); (2) 关于数学学习的知识 (Knowledge of Learning Mathematics, KLM); (3) 关于数学教学的知识 (Knowledge of Teaching Mathematics, KTM); (4) 数学内容知识 (Mathematical Content Knowledge per se, MCK per se); (5) 用于教学的数学内容知识 (Mathematical Content Knowledge for Teaching, MCK for Teaching). 该结构能够揭示出教师知识的一些独特特点: (1) 虽然教师知识可以拆分成以上这些部分, 但实际上这些部分有机组合在一起, 整体就具有全新的功能, 即整体的功能就会大于各个部分功能之和. (2) 教师培训项目只能尽可能提供一个肥沃的土壤, 以供教师成长, 但教师知识的吸收与形成, 都是需要教师个人进行主动建构.

澳大利亚塔斯马尼亚大学 (University of Tasmania) Nicole Maher 及其同事^[17], 另辟蹊径, 从学生角度出发, 重新审视和探讨学生视角下的教师 PCK. 该研究以高中阶段数学课程中概率分布的学习为例, 通过问卷调查和访谈, 收集了学生眼中认为对自己的学习有帮助的教学行为和策略. 在此基础上, 该研究以教师 PCK 知识为理论框架, 对这些行为和策略进行了归类 and 整理. 该研究表明, 在学生视角下, 以下几方面显得非常重要: 教学策略与课堂教学与管理技能 (Teaching Strategies and Classroom Techniques), 概念的解释方式和知识的呈现方式 (Representation of Concepts, Explanations, and Knowledge of Examples), 数学知识体系与知识的内在联系 (Mathematical Structure and Connections), 程序性知识和解题方法 (Procedural Knowledge and Methods of Solution), 学习任务的认知难度 (Cognitive Demands of Task).

2.5 课程与教材

新西兰奥克兰大学 (University of Auckland) 学者 Ban Heng Choy 及其同事^[18], 针对如何描述一个国家的教材特征 (Textbook Signature), 提出了相应的理论框架. 该研究以直线的斜率这一概念为例, 分析德国、新加坡和韩国的数学教材. 该理论框架把教材特征分为 3 个变量: 背景变量 (Contextvariables), 内容变量 (Contentvariables) 和教学变

量 (Instructional variables)。背景变量, 包括教育体系, 学制安排, 数学教学时间安排, 教科书的数量, 出版过程, 数学课程的设计重点。内容变量, 包括“斜率”的概念化方式 (比如几何比值、代数比值, 物理意义、几何意义、与三角函数的关系, 与微积分的关系、实际情境中的意义等), 以及教材中的定义、法则、表征方式、解释方式、例题、习题。教学变量, 包括教学任务 (例如教学中涉及的例题与习题) 的难度要求等。通过对比分析德国、新加坡和韩国的数学教材, 该框架能够比较全面地展现出一个国家在数学学科的教材特征。

传统意义上, 数学证明往往是与高年级的几何内容的学习联系在一起的。但是现在, 随着各个国家对数学证明的要求的提高, 数学证明已经渗入到大多数年级的数学学习中。数学课程中数学证明的设置与安排就变得至关重要。数学证明中应当涉及哪些内容? 以及随着年级的变化, 这些内容应该如何安排? 大阪教育大学 (Osaka Kyoiku University) 学者 Yusuke Shinno 及其同事^[19], 针对数学证明, 建构了相应的课程开发理论模型。在该理论模型下, 数学证明的课程设置, 包含内容与层次 (Contents and Levels) 两个方面, 每个方面又分成语句描述 (Statement), 证明过程 (Proof), 理论 (Theory) 3 个维度。具体细节如表 2 所示。

表 2 “数学证明”课程模型

	语句描述	证明过程	理论
内容	a 特称命题	a 直接证明	a 经典理论 (比如
	b 全称命题	b 间接证明	数论、欧式几何、
	c 存在命题	c 数学归纳法	微积分等)
	d 其它		b 元理论 (比如排
层次	对象:	验证:	体系性质:
	i 现实情境中的对象	i 解释 (归纳推理或者溯因推理)	i 基于现实世界中的逻辑推理
	ii 数学情境中的对象	ii 数学证明	ii 局部理论
	iii 形式证明	iii (类) 公理论	
层次	表征方式:	表征方式:	
	i 图形, 操作, 手势	i 图形, 操作, 手势	
	ii 日常语言	ii 日常语言	
	iii 数学语言与符号	iii 数学语言与符号	

课程改革和数学教育研究一直相辅相成。世界各国都非常关心课程改革中的变化、问题以及应对措施。澳大利亚昆士兰科技大学 (Queensland University of Technology) 学者 David Nutchey 及其同事^[20]重点研究了初中教师对课程实施的应对状况。近年来, 澳大利亚进行了一系列得课程改革, 新课程注重“实际情境—抽象化—数学过程—总结反思” (Reality-Abstraction-Mathematics-Reflection, RAMR) 理念, 设置了一系列的学习活动, 帮助学生建立数学学习与实际情境的关联, 并形成概念性理解, 同时建构数学知识体系。该研究分析了初中教师对于数学课程的理解, 以及他们在课堂教学中对新课程的实施情况。David Nutchey 及其同事所建立的理论体系包含两个维度: 课程维度, 包括数学结构, 顺序编排, 教学方法, 课程资源使用, 评价方式; 教师行为维

度, 包括拒绝者, 模仿者, 反思者, 促进者。具体如表 3 所示。

表 3 教师对课程实施的应对状况

	拒绝者	模仿者	反思者	促进者
数学结构	教学和教研讨论中没有涉及到数学结构的内容	教学和教研讨论中没有涉及到数学结构的内容	反思自身对于数学结构的理解	提升自身对于数学结构的理解
	孤立地处理每部分数学内容	学习活动注重概念性理解	讨论课程中对于数学结构的设置	对于课程中的数学结构设置, 提供建设性意见
顺序编排	过于注重学生在解题结果上的流利程度	按部就班地实施课程中设置的学习活动, 但忽略这些学习活动之间的关联	讨论和分析课程中学习活动的设计顺序, 以及这些学习活动的内在联系	根据对结构性知识的理解, 调整课程设置, 用以适应学生的实际情况
	忽略、跳过或者打乱课程中设置的学习活动	针对每节课授课计划, 相对缺少长期授课计划	有长远授课计划, 培养学生对数学知识形成结构性地理解	积极参与教研讨论, 期望进一步优化课程设置
教学方法	教学强调记诵, 缺少情境性学习活动, 没有按照 RAMR 理念进行教学	按照 RAMR 理念进行教学, 但稍显机械, 不够灵活	积极反思和讨论 RAMR 理念在教学中的使用和调整	根据学生的实际情况, 提供建可行性议, 优化和调整 RAMR 理念在教学中的使用
		注重数学活动与语言运用之间的联系, 注重情境性学习		
课程资源使用	使用个人资源, 与课程理念缺乏一致性	使用课程提供的资源, 并按照课程理念使用这些资源	根据学生的需求和课程理念, 对课程提供的资源进行反思	对课程提供的资源进行优化, 同时收集、设计与课程理念相符的资源
考试评价	终结性评价为主, 注重解题流畅性, 而非概念性理解	过程性评价为主, 使用评价结果促进教学	反思评价的内容范围、形式、语言使用情况等	提供建议, 优化和调整评价方式, 解决现有评价方式的弊端

2.6 考试评价

近年来世界各国的课程改革都格外重视统计素养, 但是如何考查统计探究的过程, 一直是争论的焦点。澳大利亚塔斯马尼亚大学 (University of Tasmania) 学者 Noleine Fitzallen^[21]将统计探究分为 4 大环节, 并采用 SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) 模型, 对统计探究过程进行考查与评价。统计探究 4 环节及其要素包括: 提出问题, 涉及情境, 总体, 测量方法, 数据特性; 收集数据, 涉及问题, 数据类型, 统计工具, 样本大小, 多样性特征; 分析数据, 涉及问题, 数据, 图像化工具, 数据简化工具; 做出决策, 涉及情境, 问题, 分析, 不确定性, 解释。在 SOLO

模型下,统计探究的理解水平分为3个层次,具体如表4.

表4 统计探究的理解水平

成功的学习结果	
关联性水平	能够将所有要素进行有机整合,从而得出结果;识别并解决探究过程中出现的冲突与矛盾
多结构水平	能够将大部分要素按照一定的顺序联系起来;能够识别探究过程中出现的冲突与矛盾,但不能解决
单一结构水平	孤立地处理每个要素,不能够识别探究过程中出现的冲突与矛盾

金融素养是世界各国课程改革的另一个重点.由于金融素养涉及数学和金融两方面的知识,金融素养方面的课程如何设计,其实一直是难点.加拿大英属哥伦比亚大学(University of British Columbia) Mary Connolly 及其同事^[22]分析和汇报了一个成功的实施案例.该案例中,课程的实施者包括两个群体,一个群体是学校的专职教师,另一个群体是在职的金融人员.金融人员以兼职教师的身份参与到课程实施中.该课程中,金融素养范围较广,涉及以下诸多方面:安排预算,计算生活需求与生活成本;信用卡使用方法,包括付费,手续费,还款与利息等;货币付费方式,比如现金,借记卡,信用卡等;设置金融计划,如设置目标,存款,投资等;银行业务,如储蓄账户和支票账户;金融骗局与消费者权益;利息计算方法,单利与复利;大学贷款;分期付款购房;银行的盈利方式,如信用卡,借贷以及手续费等;信用报告与信用等级;股票市场常识,比如公司公权,股票价格,风险控制等.课程的教学方式也较为多样,包括:传统课堂教学和实际案例分析.实际案例分析中,由相关金融从业者担任兼职教师,这些金融从业者可以从自身工作经验出发,运用真实案例,针对普通民众经常遇到的金融问题,进行阐述和解释.

随着PISA2012测试结果的公布,一系列相关研究也相继开展.PISA数学测试国际委员会主席、澳大利亚墨尔本大学Kaye Stacey教授和澳大利亚教育研究委员会(Australian Council for Educational Research)研究员Ross Turner^[23]报告了他们关于PISA2012数学测试的新研究.该研究指出,PISA2012测试第一次考查并分析了学生在“数学过程(process of Doing Mathematics)”方面的熟练程度.PISA2012测试涉及3个数学过程:将问题数学化(Formulate),运用数学知识解决问题(Employ),解释、应用和评价数学结果(Interpret).数学素养的全部试题中,每道试题都会涉及这3个数学过程,但为了研究的方便,每个试题解答过程中认知难度最大的数学过程,会被记为该题的数学过程,因此学生在该题的“数学过程”得分,也就是改题解题过程中认知难度最大的数学过程的得分.在这个意义下,PISA测试的题目中,50%的题目属于Employ,各有25%的题目属于Formulate和Interpret.从这个角度来分析,PISA2012数学测试的结果令人值得深思.OECD国家数学素养的平均得分为494,将问题数学化(Formulate)方面的得分为492,运用数学知识解决问题(Employ)方面的得分为493,解释、应用和评价数学结果(Interpret)方面的得分为497.从得分上看,Formulate类型的题目比较难,Interpret类型的题目

比较容易.同时,数学素养得分最高的9个国家中,在Formulate过程上的得分也最高.这些国家多为亚洲国家,而亚洲国家在一般印象中是比较擅长于Employ这个过程.这个结果表明,实际情况与刻板印象并不相符.同样的,英语国家(这里指加拿大,澳大利亚,新西兰,美国和英国)学生往往擅长与Formulate和Interpret,但实际结果是他们仅在Interpret这一项得分较高.该研究指出,得出这样的结果,研究者需要深思背后的原因,究竟是PISA测试本身不能够有效地反映出客观事实,还是说研究者之前的认识不够真实和全面.这些问题的回答,需要更进一步的研究与分析.

2.7 数学教育中的思辨探讨

澳大利亚墨尔本大学David Clarke教授^[24],跨界理论(Boundary crossing)能够帮助研究人员更好地进行比较教育研究.因此,他借助跨界理论,分析和探讨了数学比较教育研究中的6种不同的跨界方式.David Clarke教授指出,比较教育研究中会涉及到不同教育情境或者不同学习群体之间的比较,由于研究对象之间的差异性,不可避免地要遇到边界及其跨越的问题.这里所指的边界,可以是自然形成的(如不同自然地理环境),也可以是人为划分的(如不同的人文社会情境).David Clarke教授分析了比较教育研究中6种不同的跨界方式及其注意事项.同时,他也指出,在数学比较教育研究中,有时打破边界,促进交流,使得我们能够学习其他文化背景下的教学实践与理念;有时又需要建立新的边界,以使得相关概念变得清晰明了.

澳大利亚弗林德斯大学(Flinders University)学者Virginia Kinnear^[25]分析阐述了数学学习与统计学学习的区别.Virginia Kinnear认为,明确两者之间的区别以及统计学习的特点,对统计知识的教学和学习至关重要.她认为,统计学的核心是多样性(variation)与不确定性(uncertainty),数学知识的作用,是使统计学中的多样性得以量化.统计学与现实情境和数据紧密相连,统计推理的主要形式为归纳推理.而数学学习的过程,往往与不确定性是对立的,对于数学问题而言,正确答案往往只有一个.

德国不莱梅大学(Universität Bremen)学者David A Reid^[26]分析和归纳了国际测试比较研究中的4大障碍.David A Reid以数学证明(Proof and Proving)为例,对PISA测试和TIMSS测试进行了分析.他指出,国际测试研究中研究者需要认真对待以下4大障碍:语言方面障碍,知识论方面障碍,文化方面障碍,教育体系障碍.其中语言方面障碍与知识论方面障碍,尤其需要特别重视.在语言方面,Proof与Proving所蕴含的含义在不同文化中往往不同.例如,Proof通常指一个对象,数学教育者使用时,有两种可能的含义,书面证据,或者有说服力的理由.Proving通常指一个过程,数学教育者使用时,有3种可能的含义,演绎推理的过程,“对观察结果正确性产生或者去除疑惑”的推理过程,“教师与学生共同完成数学证明”的集体过程.这些不同往往容易被研究者忽略.类似地,在知识论方面,不同文化中,对Proof与Proving知识论基础的认识并不相同.这往往会涉及证明与真理、有效性等概念之间的关

系。David A Reid 强调,理解以上这些障碍,并在此基础上,一致地使用和理解 Proof 与 Proving,对国际比较研究意义重大。

2.8 学生数学学习

英国伦敦大学国王学院学者 Karen Skilling 及其同事^[27], 研究和分析了学生对数学学习的学习态度,与学生学习成绩之间的联系。对数学学习的投入往往是数学教育工作者特别关心的问题,有些学者甚至会把学生对数学学习的投入程度作为预测其数学成绩的一个指标。但是,对数学学习的投入程度与数学学习的成绩之间并没有显著性关联,因为有很多学生,虽然对数学学习和投入,但数学成绩并不理想。同样地,也有另外一部分学生,学习成绩相对较好,但是他们对数学的学习并不投入。两类学生的存在,都应该引起数学教育工作者的重视,因为这表明,这两类学生在数学学习方面,还需要教师提供特别的支持与指导,只有这样,才能保证学生既要数学保持很高的学习动机,同时还能掌握所学的知识。

德国慕尼黑工业大学 (Technische Universität München) 学者 Jana T. Beitlich 及其同事^[28], 使用 Eye Movement 新技术,追踪学生眼球运动,从而分析学生在不同的表征方式之间注意力的转移。Jana T. Beitlich 及其同事观察和分析了学生面对不同类型的例题时的反映。两种例题包括启发式例题 (Heuristic Worked Examples) 与普通例题,这两者之间的区别为:普通例题往往直接展示解题的过程;启发式例题的展示过程则比较间接,比较注重探究过程,以及容易出现的错误,等等。同时,启发式例题也展示出一个数学证明从无到有逐步形成的过程,其目的在于提高学生论证技能。启发式例题中所包含的3种表征方式:文字 (Text), 图片 (Picture), 符号 (Symbol)。该研究表明,追踪学生眼球运动,能够更加切实有效地反映出学生不同表征方式之间的转换,从而能够帮助研究者更加有效地分析学生的心理活动状况。

澳大利亚蒙纳什大学 (Monash University) 学者 James Russo^[29]通过认知负荷理论 (Cognitive Load Theory), 分析和探讨了如何更好地在数学学习中实施基于问题的学习模式 (Problem-Based Learning, PBL)。James Russo 指出,基于问题的学习模式 (Problem-Based Learning, PBL) 在使用上受到很多批评,主要是因为 PBL 学习模式在实际使用时,如果教学设计不够合理,或者教学目标设定的不够恰当,那么就会造成学生认知负荷过重,进而影响学生的数学学习。根据认知负荷理论 (Cognitive Load Theory), James Russo 展示了一种成功的课程实践,既保证降低外部认知负荷 (Extraneous Cognitive Load), 同时在学生可接受范围内最大化内部认知负荷 (Intrinsic Cognitive Load), 从而最大化地促进学生的学习。

针对模仿式推理与创造性推理 (Imitative and Creative Reasoning), 瑞典于默奥大学 (Umea University) 学者 Johan Lithner^[30]做了大会主题报告。Johan Lithner 指出,长期以来,数学课堂中的主要学习方式是,注重数学解题过程的模仿性学习 (Imitation of Task Solutions), 该学习方式过于强调记忆和模仿,而无法有效培养学生的数学能力 (Mathematical

Competence), 比如数学理解能力, 数学判断能力以及数学应用能力。因而,该学习模式饱受批评。尽管数学教育学者长期致力于提出对这种“模仿性学习”进行改革,但收效甚微。与上述模式相对的,创造性学习模式就是学生主动建构数学解题过程,积累数学活动经验。Johan Lithner 介绍了他的最新研究项目“数学学习中的模仿式推理与创造性推理 Learning Mathematics by Imitative and Creative Reasoning (LICR)”。该项目为跨学科研究,涉及到数学教育研究人员,心理学专家,认知神经科学专家之间的合作。该项目考查了4个变量的关系:教学任务的特点,教学策略,学生思维和学生学习结果。研究目的在于,提出新的教学模式,替代过去的模仿式学习。Johan Lithner 及其研究团队采用新的任务设计,并使用测验和眼球跟踪技术 (Eye-Tracking) 和功能性磁共振成像技术 (Functional Magnetic Resonance Imaging, fMRI) 分析学生的思维和能力提升。

2.9 STEM 教育与数学教育

当前 STEM 领域的人才储备不足,国际比较测评结果也进一步证实了这一问题更加突出。因此,加强 STEM 教育,培养学生在 STEM 学科方面的能力,已经成为国际社会的共识。近年来,STEM 教育受到了研究者、一线教师与校长、工业界人士还有教育部门政策制定者的关注。澳大利亚昆士兰科技大学 (Queensland University of Technology) Lyn English 教授^[31]的大会主题报告,探讨了 STEM 中数学教育面临的挑战与机遇。Lyn English 教授指出,STEM 这个名词在 20 世纪 90 年代由美国国家科学基金会 (National Science Foundation) 提出。其目的是联合每个领域的力量,强调 STEM 学科的重要性,进而引起社会对 STEM 的重视。但是,自从这个名词被提出以来,各方面的争论就一直持续不断。这些争论的主要原因在于,国际社会并没有对 STEM 教育有统一的定义。同时 Lyn English 教授指出,STEM 内部学科之间在重视程度上也存在不平等现象。尤其是,STEM 教育越来越成为科学教育的代名词。这无疑提升了科学教育的地位,但是在无形之中也降低了数学教育的地位。因此,随着学校与社会强调 STEM 教育的同时,STEM 教育中的数学成分面临边缘化的危险,尤其是相对于科学而言。但是从另外一方面看,数学素养得到越来越多的重视,世界各国对于国际测评结果中数学成绩格外关注。针对这些挑战和机遇, Lyn English 教授指出,为了增强和提升数学教育在 STEM 中的地位,需要找到契合点。寻找 STEM 内部不同领域间深层次的联系。数学可以起到桥梁作用,将 STEM 内部各个领域联系起来。因为随着科技的发展,STEM 的很多问题都会涉及到大量的数据,这些数据都具有不确定性的特点。这使得数学和统计学的作用变得越发的重要。在处理和分析这些数据时,如果一个人具备较高的数学素养,那么所做出决策就会更为明智,同时也能够在全球性或者地域性事务中提供建设性意见。同时, Lyn English 教授还提供了两个成功案例,展示如何更好地实施 STEM 教育。

2.10 大学数学教育研究

针对大学数学教育改革,韩国首尔大学 (Seoul National University) Kwon, OhNam 教授^[32]做了题为“ How to Teach

without Teaching”的大会主题报告。Kwon, Oh Nam 教授指出,大学数学教学的模式往往是大班授课,更加注重知识传授,而忽视数学思维能力的培养。而且大学教育普遍存在的一个误区是,学生学到的知识越多,那么学生思维能力就会越强。Kwon, Oh Nam 教授引用以往的一个研究,该研究考查中美两国大学生在数学知识和思维能力两方面的差异,结果发现,中国大学生比美国大学生知识容量要大,但是两个群体在思维能力上并没有显著差异。这表明,知识容量大并不代表思维能力水平高。因此 Kwon, Oh Nam 教授呼吁对大学数学教育进行改革,它从“借用中小学数学教学中的教育理念”出发,阐述了如何对大学数学教学进行改革。同时,她还给出了两个案例,其中一个案例涉及两种教学模式的对比:传统式教学与探究式教学;另一个涉及如何利用信息技术对大学教学进行翻转课堂改革。

3 讨论与启示

3.1 研究主题与研究方法

PME 会议上,来自世界各地的学者往往报告最新的研究成果和发现。PME 会议历来对研究型论文报告的要求较高,因此通过对 PME39 中研究型论文报告的研究主题进行分析,可以清晰地了解当前国际学术界在数学教育研究方面的动向。通过对以上研究主题的综述,可以发现数学教师专业发展与教师知识、课程与教材的开发与比较、考试评价依然是研究的热点问题。随着大型国际测试开展,各国对教育改革越来越重视。如何在课程改革的背景下,培养合格的师资力量往往决定着课程改革的成败。相应地,课程与教材的开发决定着课程改革的理念能否具体落实。

与此同时,STEM 教育的相关研究在大会主题报告中进行汇报,说明国际数学教育界已经逐渐将 STEM 教育与数学教育视为研究的重点。新的国际形势下,各国对 STEM 人才的需求和依赖越来越大。可以说一个国家的竞争力,将在很大程度上取决于 STEM 人才的培养水平。同时,此次大会中关于 STEM 的大会报告说明,STEM 领域还有很多亟待解决的问题,比如 STEM 核心概念的澄清,STEM 教育与数学教育之间的关联,以及如何在中小学分科教学的现状下达成 STEM 学科内部的整合。

在研究方法方面,除了传统的研究方法(问卷调查,访谈等)之外,课堂录像研究也逐渐被数学教育研究学者所采用,用以分析和解决本领域的实际问题。同时,认知科学领域内高新技术也得到了很大的应用,比如通过眼球跟踪技术(Eye-Tracking)和功能性磁共振造影技术(Functional Magnetic Resonance Imaging, FMRI)分析学生的思维和能力提升。

3.2 大陆数学教育研究的国际交流程度

PME 会议的国际化程度较高,并且在国际数学教育研究领域具有较高的声誉和水平。但是,参会的大陆数学教育研究学者较少,而且与大陆数学教育教学相关的研究报告也比较少。众所周知,大陆数学教育研究已经取得了长足的进步和发展,与其他国家和地区的合作也越来越广泛。因此,会议上大陆数学教育的缺乏,说明中国学者在与国际学术界的交流还相对较少。但值得庆幸的是,2020 年 PME 大会将会在北京师范大学举办,相信随着 2020 年 PME 大会的召开,大陆数学教育界与国际同行的交流会越来越广泛和深入。

[参 考 文 献]

- [1] Cyndi Edgington, P Holt Wilson, Jared N Webb, et al. Learning Trajectories as Boundary Objects in Professional Development Settings [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [2] Hiroshi Iwasaki, Takeshi Miyakawa. Change in In-Service Teachers' Discourse During Practice-Based Professional Development in University [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [3] Constanta Olteanu. Professional Development by Experiencing the Object of Learning [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [4] Cynthia Seto, Mei Yoke Loh. Promoting Mathematics Teacher Noticing during Mentoring Conversations [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [5] Lynda Ball, Vicki Steinle, Shanton Chang. A Proof-of-Concept Virtual Learning Environment for Professional Learning of Teachers of Mathematics: Students' Thinking about Decimals [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [6] Ceneida Fernandez, Gloria Sanchez-Matamoros, Salvador Llinares. Learning about Students' Mathematical Thinking Using "KDU" [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [7] Cynthia E Taylor, AinaAppova. Mathematics Teacher Educators' Purposes for K-8 Content Courses [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*

- Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [8] Lianchun Dong, Wee Tiong SEAH, David Clarke. A Case Study of Teacher Questioning Strategies in Mathematics Classrooms in China and Australia [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [9] Miquel Ferrer, Michiel Doorman, Josep Maria Fortuny. The Classroom Discussion and the Exploitation of Opportunities to Learn Mathematics [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [10] Daniel Sommerhoff, Stefan Ufer, Ingo Kollar. Research on Mathematical Argumentation: A Descriptive Review of PME Proceedings [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [11] Masakazu Okazaki, Keiko Kimura, Keiko Watanabe. Exploring How a Mathematics Lesson can Become Narratively Coherent by Comparing Experienced and Novice Teachers' Lessons [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [12] Martin A. Simon. Learning through Activity: Analyzing and Promoting Mathematics Conceptual Learning [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [13] Olive Chapman, Brent Davis, Jo Towers, et al. Secondary Teachers' Perspectives of Mathematics Knowledge for Teaching [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [14] Seyum Tekeher Getenet, Kim Beswick, Rosemary Callingham. Conceptualising Technology Integrated Mathematics Teaching: The STAMP Knowledge Framework [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [15] Carolin Loch, AnkeLindmeier, AisoHeinze. The Missing Link? School-Related Content Knowledge of Pre-Service Mathematics Teachers [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [16] Thorsten Scheiner. Shifting the Emphasis toward a Structural Description of (Mathematics) Teachers' Knowledge [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [17] Nicole Maher, Tracey Muir, Helen Chick. Secondary Mathematics Students' Perceptions of Their teachers' Pedagogical Content Knowledge for Teaching Aspects of Probability [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [18] Ban Heng Choy, MiYeon Lee, Angel Mizzi. Textbook Signature: An Exploratory Study of the Notion of Gradient in Germany, Singapore, and South Korea [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [19] Yusuke Shinno, Takeshi Miyakawa, Hideki Iwasaki, et al. A Theoretical Framework for Curriculum Development in the Teaching of Mathematical Proof at the Secondary School Level [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [20] David Nutchey, Edlyn Grant, Tom Cooper, et al. A Continuum to Characterise and Support Teacher Interpretation of an Innovative Curriculum [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [21] NoleineFitzallen, Jane Watson, Lyn English. Assessing a Statistical Inquiry [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [22] Mary B Connolly, Cynthia Nicol. Students and Financial Literacy: What do Middle School Students Know? What do Teachers Want Them to Know [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.

- [23] Kaye Stacey, Ross Turner. PISA's Reporting of Mathematical Processes [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [24] David Clarke. Comparative Research in Mathematics Education: Boundary Crossing and Boundary Creation [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [25] Virginia Kinnear, Julie Clark, Shaileigh Page. Engaging Statistics: Why the Difference between Statistics and Mathematics Matters in Teaching and Learning Statistics [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [26] David A Reid. Student Understanding of Proof and Proving: Is International Comparison Possible [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [27] Karen Skilling, Janette Bobis, Andrew Martin. The Engagement of Students with High and Low Achievement in Mathematics [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [28] Jana T Beitlich, Andreas Obersteiner, Kristina Reiss. How do Secondary School Students Make Use of Different Representation Formats in Heuristic Worked Examples? An Analysis of Eye Movements [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [29] James Russo. How Challenging Tasks Optimise Cognitive Load [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [30] Johan Lithner. Learning Mathematics by Imitative and Creative Reasoning [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [31] Lyn D English. STEM: Challenges and Opportunities for Mathematics Education [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.
- [32] Oh Nam Kwon. How to Teach without Teaching: An Inquiry-Oriented Approach in Tertiary Education [A]. In: Beswick K, Muir T, Wells J. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [C]. Hobart, Australia: PME, 2015.

Climbing Mountains in Mathematics Education Research

——A Review of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

DONG Lian-chun¹, CAO Yi-ming²

(1. Graduate School of Education, University of Melbourne, Melbourne, VIC3010, Australia;

2. School of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: The 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education was held in Hobart, Tasmania in Australia from 13 July to 18 July, 2015. The theme of the PME 39 is "Climbing Mountains, Building Bridges". In order to help the domestic mathematics education researchers to capture the main ideas of the research reports in this conference, this article aims to explore the research papers presented in this conference and introduces the trend and advancements in mathematics education research worldwide.

Key words: mathematics education; Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education; PME

[责任编辑:周学智]