

数学美妙好玩 让人感觉到解放

——张景中院士访谈录

曹一鸣 周明旭 张晓旭



张景中, 1936年12月生于河南汝南县。中科院院士、教授、博士生导师, 任广州大学计算机教育软件研究所所长, 中国科学院成都计算机应用研究所名誉所长, 任华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心学术委员会主任, 江西城市学院名誉校长、学术委员会主任。

主要从事机器证明、教育数学、距离几何及动力系统等领域的研究。主要贡献有:(一)提出了面积解题方法, 并用之于机器证明的研究, 使几何定理可读证明的自动生成这个多年来进展甚小的难题得到突破。(二)创立计算机生成几何定理可读证明的原理和算法, 这项成果被权威学者认为是使计算机能像处理算术一样处理几何工作的里程碑。(三)创立定理机器证明的数值并行方法的原理和算法。(四)对几何定理机器证明的吴方法进行了改进和发展, 创立了含参结式法, 升列组的WR分解算法, 彻底解决了可约升列相对分解问题。(五)创立了教育数学的思想和方法。

张景中院士的研究涉及计算机科学、数学、数学教育、教育信息技术等多个领域,是数学、计算机科学和教育信息技术3个方向的博士生导师。创建了几何定理可读证明自动生成的理论和算法,提出了定理机器证明的一系列新算法,开拓了教育数学研究方向。

张景中院士重视数学科普工作,于1990年被中国科普协会评为建国以来贡献突出的科普作家,他的著作《数学家的眼光》被中外专家誉为“是一部具有世界先进水平的科普佳作”。我们因为做一个“与数学家同行”的活动,专门就有关问题对张院士做了一次专访,请他对数学和数学学习的相关热点问题发表看法。张院士以简单形象的例子为载体,讲述了他的看法,使我们获益匪浅。

访谈人:张院士您好,非常感谢您接受我们的采访。能否谈谈您有关学习数学,特别是中小学时代学习数学的一些经历?

张景中:我在上中学、小学的时候,数学的课本或读物没有现在这么多。我的学习经历也很普通,没有参加过数学竞赛,也没有别的什么特殊的。平时就是做老师布置的题目,老师把题留给我们,我就按部就班地做。我当时比较喜欢的是提前看一看,能看明白的就先做了,有不明白的就先认真听老师讲再做。我想自学其实是很重要的。说老实话,我对数学的兴趣,是在高中时看到一本微积分的书后才逐渐产生的。那本书我虽然有很多地方看不太懂,但是觉得那本书很妙,因为书中讲了很多奇妙的方法,比如怎样最快求出最大值、最小值等。这样的方法引发了我学习数学的兴趣。因此上大学就选择了数学。到学微积分的时候,才真正越学越感受到其中的奥妙。

访谈人:您到高中的时候才对数学感兴趣,某种程度上是因为觉得数学的确很美妙。您也曾主编《好玩的数学》这部丛书,这本书获得了好评,您能谈谈数学好玩在什么地方吗?

张景中:我觉得数学好玩是因为数学非常理性,首先在学习和研究的过程中,数学能够让人感觉到解放。

访谈人:感觉到解放?

张景中:对,数学能够让很多原来不行的东西都变得行了。刚开始学数学时,有一些清规戒律,随着我们不断地往下学,这种清规戒律就不断地被打破,使人一次又一次地感觉到解放。比如,原来负数是不

能开方的,后来经过一定的发展,负数就能够开方了。再如,原来只是有穷个数相加,后来无穷个数也可以相加。在这个过程中,你就会越学越感觉数学受到的清规戒律越来越少。再如,非欧几何发展后,三角形的内角和就不只是 180° ,可以是大于 180° ,也可以是小于 180° ,还有很多很多这样的例子。

由此你可以看到,数学里面无禁区。你只要想做的都可以做到,原来没有规定的你也可以规定。原来他是这样定义的,你可以那样定义,这让我感觉到了解放。

访谈人:如您所说,数学在很大程度上能够让我们感觉到解放,但是这种“解放感”可能不是大多数人能够体会到的,甚至有人认为,数学是僵化、束缚人们手脚的藩篱。您的这一深入浅出的解读可以让我们更好地理解康托所说的“数学的本质在于自由”。人们只有认识到数学是自由的,才能体会数学是美好的。您觉得哪些是大多数中小學生能够感觉、体验到数学是好玩的地方?

张景中:我想应该是力量感。数学是很有力量的。因为有时候,你只需要学一个小时,解决问题的力量跟以前就大不相同了。比如,在小学里,那种很难的应用题,当然现在讲得比较少了,但是还有很多四则运算的应用题。有的应用题,学生拿回去,自己不会,家长也不会,解起来很困难。到后来,学了代数,列个方程就可以解出来了。你如果不断学习,越学会越觉得数学给人带来的力量简直是不可想象的。

比如读书,有两种书:一种书读过之后感觉作者写得好,想的和自己差不多;另一种书是只要不看这本书,可能你一辈子也想不出这个方法、这种思想。数学书有很多都是后面这一种,为什么呢?因为其中的很多问题都是世界上许许多多爱动脑筋的人想了很久,终于有一个人想出来一种方法,把它解决了。这种方法是前人经过几百年才探索出来的,如果你学会了,那么你就在一节课里往前进了几百年。如果让你自己想,可能一辈子都想不出来。这种书有阳刚之美,也就是有特别的创造性。这种原创性的问题,我们在数学学习中、在数学教学时几乎每个星期都会遇到,而且自己在解题时,也会创造出新的东西来。所以,如果老师在教学时也能带给学生一种力量感,经常让学生回忆昨天还不会的问题今天就会了,那么他对数学的看法就会不同了。

访谈人:除了感觉到解放和力量,您觉得数学还

能让我们感觉到什么呢?

张景中:数学还能让人感觉到震撼。比如,在集合论里面,两个无穷都是无穷,居然还可以比较大小,这是非常奇妙的。许多科学家在学习数学的过程中也感到了震撼。伟大的科学家爱因斯坦在他的回忆录中这样描写道:在我 12 岁的时候,叔父给了我一本几何书,其中有一道题让我感到震撼。什么题呢?是这样一道题:一个三角形,作出它的三条高。完成之后,我发现这三条高居然定会交于一点!人们不仅能发现这个事实,还给出了证明。这个几何定理使我从 12 岁开始便有了研究科学的梦想。后来,爱因斯坦果然实现了这个梦想。另外,我想还有些事情在历史上对人的思想是有震撼感的。比如,勾股定理,中国人很早就发现了。但西方国家认为,勾股定理是古希腊的毕达哥拉斯最先发现的,当时他不知道中国已经有人发现了,以为是他首先发现的。因此,他就认为这是上帝给他的启示,非常兴奋。据说他杀了 500 头牛,请全城的人来赴宴,庆祝这件事情。许多哲学家说,有一个直角三角形摆在那里好像就一目了然了,但有人忽然告诉你,你没有看清楚它里面蕴含的规律。这在哲学上是非常有启示意义的。这说明了数学给人带来的好处,让人觉得表面上看不会有的事情,它的背后却隐藏着一定的规律。说到数,也有好多这样的事情。比如,假定全班有 50 个学生,如果你问有没有两个人的生日是同一天,几乎都是有的。我们可以用概率进行推断,这种情况发生的可能性在 97% 以上,而且可以马上算出来。有很多事情好像是随机的,但它里面蕴含有很强的数学规律。再说简单一点,比如乘法,用一个数不停地乘,乘上 10000 次会是什么样子呢?比如,13 自乘 10000 次(即 13^{10000}),我们可能知道它是很长的一个数,但是不知道它究竟有多长,是什么样子。有了计算机,马上就能将它的结果一位一位地罗列出来。这也是数学的力量。计算机的原理是数学家首先提出来的,在还没有电子管的时候,数学家就已经提出了电子计算机的模型,而这个理想又过了很多年才在技术上得以实现。

访谈人:事实上,即使我们说数学是好玩的,但还是有很多人认为数学是非常难,非常枯燥的。您认为怎么样才能够让大众更易于接受数学呢?

张景中:怎么让数学更容易,这是一个值得思考的问题。我觉得可以先解放学生的思想。我们以前的教材把乘法中的数分成乘数和被乘数,乘数写在后面,被乘数写在前面。比如,有 3 个孩子,每个孩子 2



个苹果,求一共有几个苹果,书中要求必须写成 2×3 ,而写成 3×2 就是错的。事实上,乘法交换律是个非常重要的规律,在学生最开始学乘法的时候,如果告诉他 3×2 等于 2×3 ,3 个 2 或 2 个 3 无论是写成 3×2 还是 2×3 都是可以的,学生的出错率就会降低,因为他们的思想得到了解放。在这里,出错是因为有规定。客观上 2×3 等于 3×2 ,你规定它不错它就不错,何必因这些规定而让学生多出错呢?我们最初辛辛苦苦地告诉学生 2×3 不能写成 3×2 ,到后来又告诉学生 2×3 和 3×2 是一样的,这就有些像在做无用功了,现在的新教材已经不再做强制的区分了。再如,讲分数的时候,将分数分成带分数、真分数、假分数,老师花费很多时间去讲,到后来会发现这些东西是没有什么用的,而且科学技术上根本就不怎么用带分数的。所以我想在数学学习中,像这样可有可无、无伤大雅的东西,让学生花许多精力去学习是不划算的。所以在数学已经这么难的情况下,就不要再人为地制造困难了。

其次,我想在教学中,老师要抓住本质的东西,讲清楚数学概念。我举一个小例子。小学的时候学习了平行四边形的面积是底乘以高。但是,你有没有想过这个计算公式是怎么来的呢?一个长 4 厘米、宽 3 厘米的矩形,可以分成 12 个边长为 1 厘米的正方形,它的面积就是 12 平方厘米。如果这个矩形是用木条钉成的,我们不小心把它弄歪了,变成了平行四边形的面积的和了(这个例子,如果让五六年级的学生探讨,他们可能会得出非常深刻的结论)。如果你能把 1 个单位菱形的面积算出来,整个平行四边形的面积自然就知道了。那么如何求单位菱形的面积呢?通过探讨你会发现,其面积大小依赖于菱形的角的大小。我们先把这个角记为 A , A 不一样,面积就不一样,这就是函数的概念。回到面积,这个问题小学生是没有

办法解决的,但我们知道这个面积是 $\sin A$ 。小学生不知道是什么意思,但如果告诉他们用计算器上的一个键可以算出来,就可以进一步得到正弦函数的定义:对于边长为 1 的菱形,有一个角是 A ,我们就把它的面积叫做 $\sin A$ 。这样一来,我们虽然不知道角 A 的单位菱形的面积是多少,但是先给它起个名字 $\sin A$ 。这样我们从一个小问题探讨得出了正弦的定义,但是它的难度降低了,范围拓宽了,概念清楚了。这相对于传统教学来说,能够让学生一下子知道钝角的正弦的定义,角是直角时,正弦值是 1 也很容易理解了,不再需要通过极限去说明。

我们如果在小学的内容里去掉一些不必要的东西,在中学的内容里改变一些不好的定义,就可以把很难的东西变得容易,从原理上讲逻辑将变得更严密。如果按照这个思路,我们的课改会使学生学得更容易、更快乐,而且比原来学得更多。现在的教育理念大多在讲教学的组织方法。如果我们再进一步,不仅在方式方法上,还能在内容上再改进一步的话,可能会更好。这就要求小学要做好铺垫。怎么铺垫呢?小学里面要逐步渗透函数思想、符号思想,还有定义的思想。数学里面的概念、定义都是人给的,人规定的,人起的名字,比如你开始时不知道 30° 角的单位菱形的面积,就给它起个名字,我们就可以得出公式,有了公式就可以列方程,列了方程一解就知道了,这就是数学方法。

访谈人:现在有很大一部分人会认为,如果不考就不必要教,不考就不必要学,因为与成绩无关,与升学无关。您觉得面对这种情况,怎么应对呢?

张景中:其实,我觉得学习的趣味性很重要,学习的目的不是为了考试,没有必要完全以考试为动力。教学应该让学生对学习有兴趣,数学教学也应该如此。数学的趣味性不在外部,而在它的内部。要让学生能够钻研到里面,体会到数学的趣味性。要做到这些,我们要提高老师的水平、教材的水平和整个社会考试的引导。我们现在的考试,内容较少,要求学生在一两个小时内完成一二十个题目,实际是让学生在有限的时间内解更多的题,而不要做过多的思考,我想这是很不好。有人认为奥数有很多缺点,但是我想奥数至少有一点是值得肯定的,那就是它提倡思考,它要求在 4 个半小时内做出 3 个题目,也就是说平均每个题目有 1 个半小时可以用来思考。但我们的考试考得更多的是记忆,学生不会思考,只是通过大量的训练掌握了一些做题的具体步骤或者

是解题技巧来应对考试,这样学生在遇到真正的新问题的时候,可能就不知道怎么做了。

访谈人:现在,很多人都不喜欢学习数学,觉得可能没什么用。基于您多年科研与科普的经验,从一个数学家的眼光来看,您觉得数学有用吗,或者说我们应该怎样正确对待数学这门学科呢?

张景中:我想这个问题比较复杂,有各种不同的情况。事实上,有的人一辈子都搞不好数学,比如台湾的三毛,但她可以做好其他的事情。但我想就大多数人来说,有了基本的数学知识,他对这个世界的理解,甚至对社会的和谐都是有好处的。我觉得数学是基本的文化素养之一。但我也不能排除特殊的原因。比如像韩寒,他不学数学也可以活得很好,生活得很好。从统计意义上来说,大多数人学了数学,能够提高他对这个世界的认识,数学对性格的陶冶也好,对处理问题的理性都是有帮助的。

数学可以很好地锻炼人的思维方法和能力,知道什么事情讲个什么道理。我觉得我们现在社会主义核心价值观,只有 24 个字,就与数学有好多相通的地方。依法治国,这个法就和数学有共同点,我们社会要有法律法规,是不能违反的,数学也是这样的。数学就先说好了一些规则什么的,比如公理,这个公理就是我们在解题和研究的时候都要遵守的,否则就不能解决问题了。

自由平等也是符合数学理论的。数学是平等的,在数学领域,无论怎样权威的人,如果说错了,任何人都可以指出来,错了就是错了,不可能是对的,否则是会有讨伐的。数学不是一人一票决定的事情,数学文化在很多点上符合这个核心价值观。我想在学习数学的过程中,人们是能够更好地体会到社会准则的。

其实数学能够培养人们的一种理性精神,大家都要形成一种契约精神,遵守规矩去做。

(作者单位:北京师范大学数学科学学院)

参考文献

- 1.张景中,彭翥成.深入数学学科的信息技术[J].数学教育学报,2009,5.
- 2.朱华伟,张景中.论数学教学中的迁移[J].数学教育学报,2004,4.
- 3.王立东,曹一鸣.教师对学生数学学业成就的影响研究述评[J].数学教育学报,2014,3.
- 4.吴立宝,王富英.数学教材习题“七功能”[J].教学与管理,2014,11.