

基于信息技术的数学问题解决教学策略^{*}

王光生¹ 何克抗²

(1 陕西师范大学 数学与信息科学学院, 陕西西安 710062;

2 北京师范大学 现代教育技术研究所, 北京 100875)

【摘要】 数学是一门研究事物抽象的量及其关系的特殊学科,特别是随着以计算机和网络技术为核心的现代信息技术的迅猛发展,数学学科在本质上越来越表现出其特有的二重性。本文从数学思维的特征入手,探讨数学方法论指导下基于信息技术的数学问题解决教学策略。

【关键词】 数学方法论;信息技术;问题解决;教学策略

【中图分类号】 G434

【文献标识码】 A

【文章编号】 1007-2179(2009)02-0037-07

所谓信息技术环境下的数学问题解决教学,是指围绕“主题”组织教学,把主题学习内容分为六个活动过程:即主题内容情境化、情境内容问题化、问题内容数学化、数学内容理论化、理论内容应用化、主题学习反思化,并以一系列精心设计的类型丰富、质量优良的有效数学教学问题(集)来贯穿教学过程,通过基于信息技术的学习环境支持和数学方法论指导,促进学生主动发现、积极探索、实践体验、解决问题,以便深层理解并掌握和运用基本知识,完成主题知识内容的意义建构,实现从能力到人格的整体发展,成为有效问题解决者的一种教学模式。该定义既保留了我国教学的优良传统——对基本知识掌握的关注,又紧紧盯住当前课程改革的总体目标——学生能力、情感、态度、价值观等整体发展目标(王光生, 2006)。

数学问题解决的全过程,通常包括:从现实背景提出问题——建立数学模型——探求解决问题的思路——问题求解——过程的反思及对结果的评价——应用与推广。

建立在建构主义思想、弗莱登塔尔的数学教育思想、何克抗的创造性思维理论与“主导——主体相结合”教学理论基础上的信息技术环境下数学问题解决教学,既是对传统数学问题解决教学的发展,同时也是对传统数学问题解决教学形成了很大的冲击。在某种意义上说,传统的一些思想观念和方式方法对现代数学问题解决教学理想的实现构成了一种阻碍。因此,如何克服这些阻碍,在数学问题解决教学中贯彻和落实上述思想和理论,是一个亟待探索的课题。目前在这方面已经进行了一些卓有成效的研究,但也存在着困难。信息技术则是克服这些困难的一个合适工具,因此本文试图从数学思维的特征分析入手,引入信息技术作为数学问题情境的构建工具和数学问题解决的支持工具,对如何有效开展数学问题解决,培养学生的数学思维能力和问题解决能力,从信息技术环境下的数学问题解决教学策略的视角作初

步的探讨。

数学思维的特征

大家知道,数学不仅是一门演绎科学,数学思维中不仅包含逻辑思维,虽然数学命题的正确性必须经过严格的演绎论证之后才能最终确定,然而给数学科学的发现和发展注入新的创造性活力的思维方式并不主要是演绎。对新命题的大胆猜想,对新思路可能性的探索和提出,乃至对复杂的演绎本身——论证路线的拟定等都不是演绎所能实现的,而是需要借助于类比、归纳、合情推理、猜想、直觉、灵感等多种多样的思维方式。这些思维方式构成了数学方法论研究的主要内容。数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。

数学是一门研究事物抽象的量及其关系的特殊学科,特别是随着以计算机和网络技术为核心的现代信息技术的迅猛发展,数学学科在本质上越来越表现出其特有的二重性(即经验性与演绎性的辩证统一)(梁芳, 2000)。运用数学方法论的观点和何克抗教授的创造性思维理论分析数学思维,我们可以了解到,数学思维也具有二重性:一类是进行逻辑推理的抽象思维;另一类是进行合情推理的表象思维(包括形象思维和直觉思维)。

思维对客观事物的反映是通过符号表征系统间接地完成的,人类在思维过程中使用的符号表征系统有以下几种(何克抗, 2000):基于言语的概念、反映事物属性的“客体表象”(也称“属性表象”)、反映事物之间联系的“关系表象”以及手势语、旗语等。思维过程中使用的符号表征系统是思维过程中进行心理加工的具体对象,也就是思维组成要素(思维加工材料、思维加工方式、思维加工缓存区和思维加工机制)中的第一个要素——思维加工材料。

* 基金项目:全国教育科学“十五”规划重点课题《基于网络环境的基础教育跨越式发展试验》(课题编号:BCA030017)。

而人类思维过程中运用符号表征系统对客观事物所作出的反映是借助以下三种心理加工方式实现的:一是通过运用言语概念进行分析、综合、抽象、概括、判断、推理的加工方式——对于逻辑思维;二是通过运用属性表象进行分解、组合、联想、想象(想象又分再造想象和创造想象两种)的加工方式——对于形象思维;三是通过运用关系表象进行直观透视、空间整合、模式匹配、瞬间判断的加工方式——对于直觉思维。逻辑思维、形象思维、直觉思维之间只有思维材料和思维加工方式的不同,而没有高低的等级之分。这三种基本思维形式是相互联系、相互支持、不可分割的。从探索新事物的本质、规律,即从创造性活动考虑,形象思维和直觉思维由于具有三维空间的非线性、跳跃性(而不是像逻辑思维那样只具有一维时间轴上的直线性、顺序性),所以往往比逻辑思维更适合于探索和创新的突破性需求。但是基于表象的形象思维和直觉思维也需要有逻辑思维的指引、调节与控制,才有可能在灵感或顿悟形成过程中更好地发挥自身的突破性作用。离开逻辑思维的这种作用,光靠形象思维和直觉思维,创造性活动是不可能完成的。我们的数学教学历来强调逻辑思维,而对用于合情推理的形象思维和直觉思维有所忽视。目前,数学教育理论对合情推理的含义说法众多,但仔细探究可分为两类:一类从逻辑学的角度出发,认为推理是根据已知判断提出新的判断的思维方式,推理有两种,论证推理与合情推理,前者回答如何证明定理的问题,后者回答如何发现定理的问题,并且认为合情推理主要包括归纳推理和类比推理,我们把它称为狭义的合情推理。另一类从数学方法论的角度出发,不仅把合情推理看作推理,而且把它看作是科学发现的方法,因而连同归纳、类比在内,把观察、实验、联想、猜测、直观等一系列科学发现的手段、方法都归于合情推理的范畴,我们把它称为广义的合情推理。本文中的合情推理是指广义的合情推理。

一般来说,在我们看来合情推理的思维方式都是在不同程度上服从于一个基本原理,即相似扩展原理。类比无非是期待并寻求相似事物具有更多的相似性;归纳则是把类中若干成员的相似性推广到类的所有成员,而类本身也只不过是具有特定相似性事物的集合而已;而有关合情推理、猜想、直觉和灵感的初步研究成果也表明,它们全部都有赖于相似启发效应。由此可见,基于相似性的探索的确是数学思维的精髓所在(周光璧等, 1995)。

既然基于相似性的探索是数学思维能力的核心要素,那么注重能力培养的数学教学应当采用基于相似性探索这样的教学策略就是不言而喻的了。

基于信息技术的数学问题解决教学策略

希腊哲人德谟克利立主张,教育力图达到的目标并不是完备的知识,而是充分的理解。物理学家劳厄则进一步指出,“重要的不是获得知识,而是发展思维能力。教育无非是把一切已学过的东西都忘掉的时候所剩下的东西”(周昌钟,

1983)。时至今日,这种强调能力培养的思想不仅没有过时,还成了现代教育理论中的主流。强化能力培养的教学理论和方法现在已成为教育科学研究的重要课题之一,“高分低能”现象的广泛存在更表明这一研究具有重要的现实意义。

美国心理学家和教育家布鲁纳认为,只有变传统的填鸭式教学为发现式教学才能达到上述的目的,这一观点已为人们广泛接受。布鲁纳特别指出,引导学生积极探索乃是发现式数学教学的关键,他说,“探索是数学教学的生命线”。那么,应当引导学生进行怎样的探索才能最有效地培养和提高他们的数学思维能力呢?根据以上对数学思维特征的分析,我们认为,在信息技术环境下将数学思维方法(更为一般地说,就是数学方法论)的教学与具体数学知识内容的教学密切地结合起来,也即以思维方法的分析去带动、促进具体数学知识内容的教学,充分发挥信息技术的认知工具和交流协作工具作用,则应该成为信息技术环境下数学问题解决教学的根本策略!基于以上分析,我们认为信息技术环境下数学问题解决教学策略主要可归纳如下。

(一)合情推理与演绎推理相结合的教学策略

逻辑思维是在“抓到真理”后进行完善和“补充证明”的思维,而合情推理则是“发现真理”的表象思维,二者的有机结合就是要在信息技术环境下的问题解决教学中“既要教会学生证明,更要教会学生猜想”!信息技术为学生有效利用合情推理提出猜想、验证猜想提供了理想的工具与环境。合情推理包括如下多种形式:

1)观察:观察是人们对周围世界客观事物和现象在其自然条件下,按照客观事物本身存在的实际情况研究和确定它们的性质和关系,从而获取经验材料的一种方法。数学观察则是对数学问题在客观情境下考察其数量关系及图形性质的方法。在学生数学学习和研究中,常常通过观察来搜集新材料、发现新事实,通过观察认识数学的本质、揭示数学的规律、探求数学的思想和方法。在问题解决教学中,教师通过信息技术创设与学习主题密切相关的真实情境,指导学生通过观察的方法发现情境中的共同现象,由现象引发困惑,由困惑启动思维,从而引导学生发现问题、提出问题。引导学生观察是数学教学中常用的一种创设情境、引入课题的教学策略。如在讲授“生活中的平移”这一内容时,教师利用PPT或视频展示传送带上的电视机、手扶电梯上的人、汽车,在笔直的公路上行驶等生活情境,并提出问题:从这些熟悉的情境中你能否发现它们所共有的现象?这些共同的现象具有什么特点?这些特点如何从数学的角度来概括或定义?

2)实验:实验则是人们根据一定的研究目的,利用仪器或工具对周围世界的客观事物与现象进行人为的控制、模拟,排除干扰,突出主要因素,在最有利的条件下考察和研究它们的性质和关系,从而获取经验材料的一种方法。除了常规的数学实验,基于信息技术的数学实验是一种重要的数学学习活动,同时也是促进学生动手操作、发现规律、提出猜想、验证猜想的一种重要的教学策略。对于绝大多数数学学

习者来说,学数学的目的就是为了用数学,而不是要成为数学家。传统的数学教学过程一般是一个演绎过程,即一般是从公理体系出发,沿着定义——假设——定理——证明——推理这么一条演绎的轨道进行的。这样的方式有它的好处,那就是它把数学知识重新整理过了、系统化了,便于课堂讲授。但是它的弊病也是明显的,因为它把数学知识的背景和来源掩盖了,活生生的数学知识变成了一堆用逻辑组织起来的符号,似乎是从天上掉下来的东西,也看不到它的应用。近年来,一些数学界的人士把这种现象比喻为“去两头,烧中段”,学生学习起来感到枯燥和困难,大部分学生都视数学为畏途。数学发展的历程一再表明,数学不仅是演绎科学,而且也是实验性的归纳科学。数学发现的过程并非是从定义出发,然后提出定理再加以证明的。在很多情况下,数学家在一开始可能连要研究什么问题都没有弄清楚,更不要说提出什么定义和定理了。他必须做一定的探索工作——观察、分析,然后归纳出其中的规律,猜想出命题应具有的形式,最后才是证明。如果把这个过程颠倒过来,学生在理解上当然会产生困难。如学生经常问我们:为什么要定义如此一个对象?为什么数学家能想出这样一个定理?它看上去如此抽象,谁又能想得到呢?

在传统的数学教学中,我们人为地强化了逻辑的作用,从而削弱甚至抛弃了观察、归纳、直觉对学习数学的作用,以致有不少学生产生了“数学就是逻辑”这样的错误观念。据说阿贝尔曾经批评高斯的书难懂,“像雪地里奔跑的狐狸,用尾巴压去了自己的足迹”。高斯则为自己辩解,“一个成功的建筑师,是不会把脚手架留在已完成的作品上的”。问题是我们是否应该把搭脚手架的本领也教给学生呢?答案当然是肯定的!事实上,当我们看到定理的一个证明时,我们只看到了故事的一半,而另一半,包括定理是如何提出来的,人们又是如何找到定理的证明方法的等等,可能比我们看到的那一半更为重要。数学实验可以比较好地解决传统数学教育中遇到的这些问题。我们可以在讲授抽象概念之前,向学生提供一定的例子,运用计算机和数学软件的计算、演示、模拟功能,让他们自己去分析、发现其中的规律,在真正讲授抽象概念时学生就不会感到太突然了。在讲述数学定理时,也可以参照这种方法,所不同的是一些定理的证明可能很困难,可以安排几个过渡性的问题,逐步诱导出定理的证明。这种做法对培养学生的观察、归纳能力很有好处,也能消除学生对数学定理、数学证明的神秘感。在计算机的帮助下,可以使以往繁重的、甚至手工不能实现的计算变得轻松起来,我们可以将一些实际的应用问题——不是那种人为编造的、数据大大简化了的所谓应用问题引入课堂,让学生了解数学的巨大作用。可以想象,这样的数学学习就不再是“去两头,烧中段”,而是津津有味的“烧全鱼”了。

数学实验是一种最根本的数学方法。尽管与其他学科相比,数学具有最高的抽象性,但数学并不是先验的,表面上的不依赖于现实只是一种假象。既然数学根源于客观实际,

实验就是不可避免的,并且是最根本的。事实上,多数数学家在研究数学问题的时候使用的正是这种方法,追求形式化和不依赖于具体的客观内容是数学自身的要求,正是这种特性才使得数学能被广泛应用于几乎每一个领域。尽管数学实验如此重要,但在数学教育领域却一直没有应有的地位,造成这种结果的主要原因是缺乏适合学生和教师使用的实验工具和环境。信息技术的发展与在教育领域的应用,为数学实验提供了理想的环境和工具。

信息技术就是由信息媒体和信息媒体应用的方法这两个要素所组成的(南国农, 2001)。数学实验是人们运用各种实验工具(实物、学具、模型、信息技术等)并通过动手动脑开展数学活动的过程。数学有两个侧面:一方面它是欧几里德式的严谨科学,从这个方面看数学像是一门系统的演绎科学;但另一方面,创造过程中的数学看起来却像一门试验性的归纳科学(G.波利亚, 1985)。过去学生的数学活动只是智力活动,缺少探究发现的数学实验活动。信息技术的出现便于学生有效地开展数学实验活动,学生利用教育软件(这里的教育软件主要指“几何画板”、“Microsoft Math”等软件)开展数学实验,即利用计算机根据或隐或显的参数进行“任意性”实验,吸引学生探索、验证或者修改自己的猜想,并最终解决问题和动态生成自己的理解,这是一种“归纳式”的学习。正如 J. Piaget 所指出的,“忽略操作的作用而总是保持在语言水平,特别在数学教育中这是一个严重的错误……操作和数学实验远非阻碍了演绎思想的后期发展,事实上它组成了一个必要的准备。”数学实验活动有利于激发学生潜在的学习能力,致力于高层次的学习状态。利用教育软件开展数学实验活动可以进一步培养学生动手能力、观察和分析问题的能力,使学生进入主动探索状态,变被动的接受学习为主动的建构过程,同时培养学生的创新精神、意识和能力。

信息技术环境下的数学问题解决学习,正是体现了数学的演绎与归纳的统一、科学与技术的统一。“数学实验”成为信息技术环境下学习者进行自主探索、提出猜想、验证猜想进而发现数学模式、建立数学模式和应用数学模式的重要途径,“数学实验”使得“教”数学转变为“学”数学,“学”数学转变为“用”数学,最终把“教”数学、“学”数学和“用”数学统一于“做”数学,也就是通过问题解决来学习数学,通过问题解决来建构知识,在“做”数学中学数学,在数字化环境中学数学。国际学习科学研究领域有三句名言: you hear you forget (听来的忘得快); you see you remember (看到的记得住); you do you understand (做过的才能会)。问题解决在于“做”,这种“做”是高级规则所涉及的概念、法则的综合应用。

用归纳方法和实验手段进行教育和学习的思想方法是:从若干实例出发(包括学生自己设计的例子)——在计算机上做大量的实验——发现其中可能存在的规律——提出猜想——进行证明和论证。“做”数学是探索数学现象,不是演练课本上的习题。它是研究、发现、困惑、最终理解的过程,也是提出更多问题、给出更多可能性的过程,实验中可以将

那些无聊的计算交给计算机而将有趣的分析留给自己。

3) 类比与归纳: 众所周知, 数学是通过演绎而展开的。也就是说, 数学结论的正确性建立在演绎证明的基础上。但是, 这些结论是怎样被发现的呢? 一般地说, 在数学发现中既包含有直觉的成分又包含有逻辑的成分。数学发现既是一种无意识的、非逻辑的思维活动, 又是一种自觉的、逻辑的思维活动。就数学方法论的研究而言, 就有两种不同的研究对象: 论证(解决问题)的和猜测(发现问题)的。这两种方法的区别是明显的; 论证的方法是可靠的、无可置疑的和终结性的; 猜测的方法却是不那么可靠的、有争议的和暂时的。因为, 在没有得到证实之前, 所得出的猜测始终有被新的发现证伪的可能性, 从而就是不完全可靠的; 另外, 由于各人的经验和思想方法必然存在一定的差异, 因此对于猜测可靠程度的估计就是因人而异, 或者说是有争议的; 最后, 新的发现则又可能导致对问题的重新认识, 因此猜测的方法也是暂时的。但又正如牛顿所指出的, “没有大胆的猜想, 就做不出伟大的发现。”因此, 在这样的意义上, 猜测的方法就比论证的方法更为重要。

类比与归纳是提出猜测的重要方法, 正如法国数学家、天文学家拉普拉斯所指出的, “即使在数学里, 发现真理的主要工具也是归纳和类比”, 学生的数学学习本质上是“再发现”、“再创造”的过程, 所以类比与归纳是学生数学学习中提出猜想的重要思维方法。

类比: 类比是根据两个或两类事物在某些属性上相同或相似, 而推出它们在其他属性上也可能相同或相似的思维方法。显然, 类比的基础是事物之间的相似性或是某种一致性, 只要两个对象有某个方面的相似性就可以类比, 包括形式上的相似、结构上的相似、内容上的相似、地位上的相似等。类比法在数学发现中具有十分重要的作用。例如, 德国天文学家、数学家开普勒就曾明确指出, “我珍视类比胜于任何别的东西, 它是我最可靠的老师, 它能揭示自然界的秘密, 在几何学中它应该是最不容忽视的。”

类比在数学学习中的作用主要有如下几点: 一是通过类比联想而发现新的数学知识。在数学发展史上, 通过类比而发展数学的例子很多。在数学学习中, 通过类比可以得到一些新的结论。例如, 由“正三角形内任一点到三边的距离之和为定值”, 类比联想到“正四面体内任一点到四个面的距离之和为定值”。二是类比是学习知识、系统地掌握知识和巩固知识的有效方法。三是通过类比联想可以寻求到数学问题解决的方法与途径, 如上述的类比联想: 由“正三角形内任一点到三边的距离之和为定值”, 而得“正四面体内任一点到四个面的距离之和为定值”。如何证明类比得到的结论是正确的呢? 仍可以通过类比而得到证明方法。在对“正三角形内任一点到三边的距离之和为定值”的证明中用的是面积割补法, 自然可以类比联想到“正四面体内任一点到四个面的距离之和为定值”的证明方法应该是体积割补法。

归纳: 所谓归纳是指通过对特例的观察和综合去发现一

般规律。波利亚(1984)指出, 归纳过程的典型步骤为: 首先我们注意到了某些相似性; 然后是一个推广的步骤, 即把所说的相似性推广为一个明确表达的一般命题; 最后我们又应对得出的一般命题检验, 即应进一步考察其他一些特例, 如果在所有考察过的特例中这一猜想都是正确的, 我们对它的信心就增强了, 而如果出现了不正确的情况, 我们就应对原来的猜想进行改进。

归纳是对同类事物中的各种特殊事物所蕴含的同一性或相似性而得出此类事物的一般性结论的思维过程。归纳有完全归纳与不完全归纳。完全归纳而得到的猜想, 一般地说是可靠的; 而不完全归纳所得到的猜想, 一般地说不一定可靠。归纳猜想与类比联想一样, 可以导致数学的发现。如德国数学家高斯就曾说过, 他的许多定理都是靠归纳法发现的。

(二) 数形结合的教学策略

数和形是数学中最基本的两大概念, 也是整个数学发展进程中的两块基石, 在一定条件下数和形是可以相互转化的。对于一个难以证明的几何问题, 如果它的题设和题断都容易用代数式来表示, 那么我们就可以把几何图形中的各元素和图形的几何性质表示为相应的数量关系, 将论证几何问题的过程转化为代数式的演算或方程的求解, 借“数”解“形”; 根据问题的需要, 常把数量关系的问题转化为图形的性质来讨论, 即把“数”与“形”联系起来化抽象为直观, 通过对图形的研究常能发现问题的隐含条件、诱发解题线索, 以“形”助“数”。数形结合是根据数量与图形关系来解决问题的一种数学思想方法, 几何图形可以用数量关系来公式化; 反之, 数量关系可以用几何图形来表现。数形结合使得两个领域重点概念和关系得到更明晰的阐述——几何概念变得更加抽象而易于处理, 数量关系则变得更加形象而易于直观理解。数学思维就其形式而言有抽象思维、形象思维和直觉思维等等。数学问题解决过程是抽象思维、形象思维和直觉思维协同作用的过程。研究表明, 恰当的问题表征是成功进行问题解决的前提条件。

表征是现代认知心理学的核心概念, 一般可以把它理解为对某一对象的内部表达, 有时也称为内部表征。相对内部表征, 一些研究者把某一对象的刺激呈现模式称为外部表征, 外部表征对内部表征有着实质性的影响。人们对某一对象的理解可以有多重的内部表征, 因此存在多重的表征系统。当学生处理一个新的数学专题时, 或者在行动情境中体验内容, 或者以图像的方式表达内容, 或者用语言来描述内容, 每一种表征都有其特殊的功能, 每一种表征都能够加深对数学特殊意义的内化。动作表征、图像表征和符号表征对数学的教与学起着重要作用, 而且不同表征之间存在相互作用。计算机的应用对学生多重表征能力起着促进作用。计算机能够提供多重的外部表征, 从而能够促进多重的内部表征。多元表征能够通过以下三种方式促进数学学习: 不同的表征能够传达不同的信息, 符号表征能够传达抽象信息, 图

像表征能够传达直观信息,从整合的表征中获取的信息比从一种单一的表征中获取的信息要多;多元表征之间相互限制,所以允许操作的空间变得更为狭小;若将多元表征相互联系起来,个体必须采取那些促进理解的数学学习活动(Park 1987)。

很久以来,图形作为一种直观工具一直是数学研究工作中不可缺少的组成部分。许多著名数学家就谈到了图形在数学研究中的作用和价值。例如, Hadamard 和 Poincare 认为,运用直观表征是问题解决的一个必要成分,我们应该鼓励学生在问题解决过程中运用图形这种直观表征(Stilianou, 2002)。美国数学家斯蒂恩认为,如果一个特定的问题可以转化为一个图形,那么思想就整体地把握了问题,并且能创造性地思索问题的解法。波利亚也认为,如果我们能设法给那些非几何对象找到合适的几何表示的话,那么我们就可以在处理非几何对象时发挥我们处理几何图形的才能(G. 波利亚, 1985)。在波利亚的探索法小词典中,画一张图是一个基本策略,图形不仅是几何题目的对象,而且对任何一开始没什么关系的题目,图形也是一个重要的帮手(G. 波利亚, 1985)。我国著名数学家华罗庚教授通过下面一首诗生动地说明了数形之间的密切联系:“数与形,本是相倚依,焉能分作两边飞。数无形时少直觉,形少数时难入微。数形结合百般好,隔离分家万事休。切莫忘,几何代数统一体,永远联系,切莫分离!”但受传统教学思想、教学模式和教学手段等影响,我们常常把“形”与“数”生硬地套在一起,没有有效地结合,更无法借助它来培养学生的创新精神和实践能力。而信息技术环境下基于问题解决的数学学习作为一种基本的学习方式,它有助于学生切实地运用“数形结合”思想去独立思考、自主探究、合作交流来分析解决问题,并在体验的过程中使创新意识和实践能力得到锻炼。在数学课程中,许多知识、图形本身就隐含着某种关系、几何意义和运动变化的因素。而传统教学工具在技术上无法创设一种“形”的支持,直观地帮助学生把知识、图形本身代表的一类事物想清楚,这是阻碍运用“数形结合”思想进行自主探究的原因之一。而信息技术其独特的技术优势弥补了这种缺陷,体现出了多方面的优势,如利用信息技术可以变“静态”为“动态”,即动态地呈现图形的产生与变化过程;变“无形”为“有形”,即把数学知识隐含的某种无形的关系和几何意义转译成有形的图形;变“特定”为“随机”,即让特定的函数图像随其参数的变化而进行随机的变化,以展示这类函数的图像及其数学内涵等。

以计算机为核心的信息技术的介入不仅带来了数学教学观念的变革,也创新了“数形”呈现的方式,为更有效地运用“数形结合”思想提供了技术支撑,同时能够满足学习者不同的学习需要,适应不同的认知风格,促进学习者个性的发展。

(三)一般化与特殊化相结合的教学策略

1)一般化:一般化也称普遍化,它是一种数学思维方法。

波利亚在《怎样解题》中指出,“普遍化就是从考虑一个对象过渡到考虑包含该对象的一个集合,或者从考虑一个较小的集合过渡到一个包含该较小集合的更大的集合”。一般化在数学学习中有两点作用:一是可以通过一般化而发现数学的一般性原理、性质、法则、规律等;二是一般化思维方法有助于数学问题解决途径的获得。波利亚指出,“雄心大的计划,成功的希望也较大”,“更普遍的问题可能更易于求解”。在数学问题解决过程中我们思考一个问题,有时可以跳出它的范围去思考比它更大范围的一般性的问题。一般性的问题有时比特殊性问题还易于解决,因此,只要解决一般性的问题,特殊性的问题就迎刃而解了。

2)特殊化:与一般化的思维方法相反,特殊化是从原思维对象所在的范围转化为比它小的,且被它所包含的范围内进行思维的方法。波利亚指出,“特殊化是从考虑一组给定的对象集合过渡到考虑该集合中一个较小集合,或仅仅一个对象”。特殊化方法在数学学习中起到“实验室”的作用,它简便、易行,是学习过程的好方法,是“以退求进”的思维方法。“特殊化”在数学学习中主要有以下作用:一是有助于问题解决途径的发现;二是可当作推翻某一结论的反例使用。

一般化与特殊化是数学学习中解决问题的行之有效的思维方法。在《数学地思维》这一著作中,梅森(J. Mason)就曾集中研究了特殊化与一般化在数学问题解决中的作用。按照梅森的观点,特殊化和一般化正是数学思维的核心,并“构成了整个解题过程的基础”(转引自:郑毓信, 1994)。具体地说,就特殊化在解题中的作用而言,梅森指出,第一,只有通过特殊化我们才能很好地了解所面临的问题;第二,只有通过特殊化我们才能认识导致一般化的模式;第三,对于所得出的一般结论我们又必须借助进一步的特殊化去进行检验。就特殊化的这三种功能而言,梅森给出了以下的基本策略:由随意的特殊化去了解问题;由系统的特殊化为一一般化提供基础;由巧妙的特殊化去对一般化结论进行检验。另外,梅森指出,就一般化而言,是指我们应当努力去引出一般的结论,揭示其内在的依据,并作出可能的推广。从而,一般化就被认为是围绕以下三个问题展开的:什么看上去像是真的?(猜测)为什么它是真的?(检验和证明)它在哪个范围内看上去也是真的?(推广)

基于信息技术的数学问题解决教学的优势

1)信息技术的有效利用,不仅可以大大增强学生数学学习的直观性,克服思维发展水平的局限,提高学生学习的兴趣和教学效率,而且有利于改变学生被动接受的学习方式,充分发挥学生的认知主体作用。如利用 Microsoft Math 软件生成各种初等函数图像,通过跟踪功能、自动列表功能、动画显示功能等多种表示方式呈现变量之间的相依关系,真实地再现函数图像的生成过程,加深学生对函数图像特征、函数概念本质及其性质的理解,使得“多重表示与表示的相互转换”这一重要函数学习理论的实现成为可能,即同一函数关

系可以用四种不同的方式——列表、文字描述、图像、解析表达式来刻画。这为具有不同认知风格的学生或同一学生从不同角度理解函数的本质内涵提供了可能。利用几何画板通过数形结合、一般化与特殊化等思维活动进行几何探索, 从而发现、探索、表现和总结几何规律。

2) 信息技术为学生进行“数学实验”提供了理想的工具与环境。函数图像是学生认识函数性质的窗口, 而 Microsoft Math 软件为学生进行各种类型函数图像特征的探索提供了理想的实验环境。为了探索函数的性质, 学生可以借助 Microsoft Math 软件快速生成一些具体函数图像, 通过观察图像特征, 发现规律、提出猜想, 而提出的猜想是否正确, 又可以利用 Microsoft Math 软件进行验证, 进而做出解释。特别是对于含有参数的函数解析式, 参数的变化是如何影响函数图像变化的? 具有怎样的规律? 利用传统的教学手段是难以取得理想效果的。Microsoft Math 软件为进行类似的“探究性实验”提供了理想的平台。教师引导学生对要进行探究的问题设计实验方案, 然后根据实验方案借助 Microsoft Math 软件进行实验、猜测、探索等数学发现活动, 实现“数学教学是数学活动的教学”, 实现函数学习的“再创造”过程, 让学生亲身经历运用函数知识建立模型以及探索规律的过程, 体验数学思想方法的价值, 增强学好数学的信心, 培养其科学探究和创新的能力。

3) Microsoft Math 软件更有利于学生从函数观点深入探索方程(组)、不等式与函数之间的内在联系。函数、方程、不等式都是描述现实世界数量关系和变化规律的数学模型, 它们之间既有区别又有联系。Microsoft Math 软件的有效运用, 能够使学生体验数形结合、类比、归纳、分类以及由特殊到一般的思想方法在解决问题中的应用。例如, 北京师大版八年级下册“不等式表示的平面区域”的内容, 就可以让学生利用 Microsoft Math 软件进行如下探究: 在数轴上, $x=1$ 表示一个点; 在直角坐标系中, $x=1$ 表示什么? 在数轴上, $x \geq 1$ 表示一条射线; 在直角坐标系中, $x \geq 1$ 表示什么? 在直角坐标系中, $x+y+2=0$ 表示一条直线; 在直角坐标系中, $x+y+2 > 0$ 表示什么? $x+y+2 < 0$ 呢? 对于后者可以先做出 $x+y+2=m$ 的图像, 并通过 Microsoft Math 软件的参数设置功能分别就 $m > 0$ 和 $m < 0$ 两种情况进行动态模拟, 这样 $x+y+2 > 0$ 和 $x+y+2 < 0$ 所表示的平面区域就可以直观地呈现在学生面前。在此基础上让学生进一步探究不等式组所表示的平面区域就水到渠成了! 总之, Microsoft Math 软件的函数与方程的绘图功能和自由设置参数的动画显示功能为学生学习函数、方程、不等式和高中的平面解析几何提供了理想的实验环境与工具。

4) 基于计算机的几何画板、Microsoft Math 软件在支持学生数学学习中的最大优势还在于不需要教师提前花费大量宝贵的时间制作课件。只要具备计算机环境和掌握图形计算器软件的基本操作, 就可以在课堂教学中根据需要随时让学生进行调用, 为实现学习目标服务。

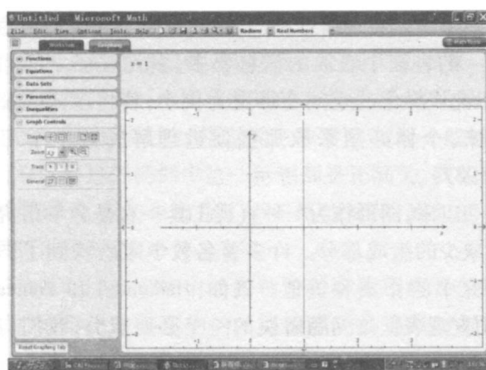


图1 方程 $x=1$ 的图形

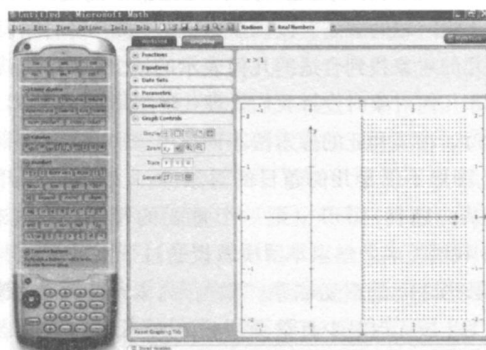


图2 不等式 $x > 1$ 的图形

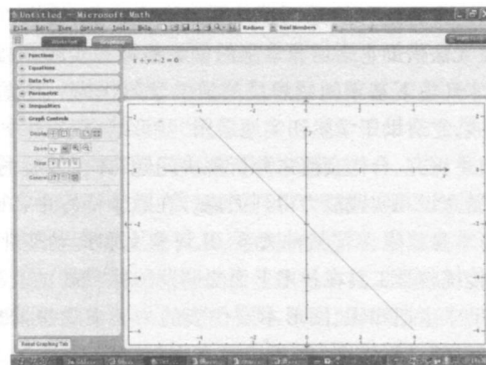


图3 方程 $x+y+2=0$ 的图形

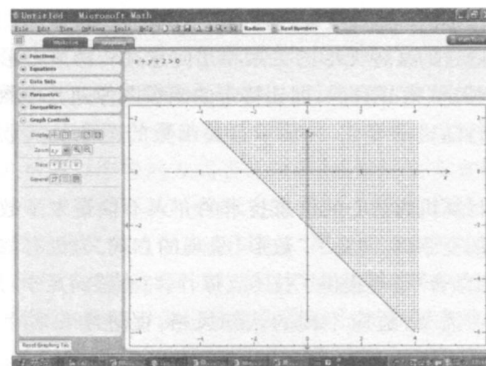


图4 不等式 $x+y+2 > 0$ 的图形

【参考文献】

- [1] Dark V. J. (1990). Switching between memory and perception: Moving attention or memory retrieval? [J] *Memory & Cognition*, 18(2): 119-127.
- [2] He Kekang (2000). DC Model Construction and Demonstration of Theory of creative thinking (in Chinese) [M]. Beijing: Beijing Normal University Press.
- (何克抗 (2000). 创造性思维理论: DC模型的建构与论证 [M]. 北京: 北京师范大学出版社.)
- [3] Liang Fang (2000). Research on Math philosophical reflection caused by Computer (in Chinese) [D]. Doctoral Thesis Graduate School of Chinese Academy of Social Sciences.
- (梁芳 (2000). 计算机引起的数学哲学反思 [D]. 中国社会科学院研究生院博士学位论文.)
- [4] Nan Guonong (2001). Information technology education and innovation person training (in Chinese) [J]. *Audio-Visual Education Research*, (8): 42-45.
- (南国农 (2001). 信息技术教育与创新人才培养 (上) [J]. 电化教育研究, (8): 42-45.)
- [5] Polya G. (1985). *Mathematics and guess* (in Chinese) [M]. Translated by Li Zhiyao, Wang Rishuang & Li Xincan. Beijing: Science Press.
- ([美] G. 波利亚 (1985). 数学与猜想 [M]. 李志尧, 王日爽, 李心灿. 北京: 科学出版社.)
- [6] Wang Guangsheng (2006). Research on teaching design of math problem-solving faced on Learner from integration perspective between information technology and math curriculum (in Chinese) [J]. *Open Education Research*, 12(5): 85-89.
- (王光生 (2006). 面向学习者的数学问题解决教学设计——信息技术与数学课程整合的视角 [J]. 开放教育研究, 12(5): 85-89.)
- [7] Wang Guangsheng (2007). Function study supported by microsoft student graphing calculator (in Chinese) [J]. *Chinese Audio-Visual Education*, (1): 91-94.
- (王光生 (2007). Microsoft student graphing calculator支持下的函数学习 [J]. 中国电化教育, (1): 91-94.)
- [8] Zhen Yuxin (1994). *Problem Solving and Mathematics Education* (in Chinese) [M]. Nanjing: Jiangsu Education Press.
- (郑毓信 (1994). 问题解决与数学教育 [M]. 南京: 江苏教育出版社.)
- [9] Zhou Changzhong (1983). *The creation of Psychology* (in Chinese) [M]. Beijing: China Youth Press, 103.
- (周昌钟 (1983). 创造心理学 [M]. 北京: 中国青年出版社, 103.)
- [10] Zhou Gusangbi & Zhang Tiesheng (1995). Exploration based on the similarity is an important way of math teaching (in Chinese) [J]. *Educational Research*, (11): 51-53.
- (周光璧, 张铁声 (1995). 基于相似性的探索是数学教学的重要途径 [J]. 教育研究, (11): 51-53.)

(编辑: 路新民)

【来稿日期】 2008-12-00

【修回日期】 2009-02-28

【作者简介】 王光生, 博士, 陕西师范大学数学与信息科学学院教师, 陕西省基础教育资源研发中心研发部主任 (wgs6611@163.com); 何克抗, 教授, 博士生导师, 北京师范大学现代教育技术研究所所长。

Information Technology-based Mathematics Problem-solving Teaching Strategy as Informed by Mathematics Methodology

WANG Guangsheng & HE Kekang

(1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;
2. College of Educational Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Mathematics is a special discipline of research that explores abstract quantity and the relationships of various quantities. With the rapid development of modern information and network technology, mathematics is increasingly showing a unique kind of duality. This article aims at exploring strategy for teaching mathematics problem. And the strategy is based on information technology and informed by methodology of mathematics.

Key words: mathematics methodology; information technology; problem-solving teaching strategy